UNTERRICHTS MATERIALIEN

Physik Sek. II

Schwarzes Loch

Fluchtgeschwindigkeit, Kompaktheit, Dichte – Übung

RAABE, KLASSE SCHULE

Gilt nun für seine „Kompaktheit“

$$C := \frac{R_S}{R} > 1 \qquad (3)$$

so ist er offenbar genau dann ein Schwarzes Loch.
Zeigen Sie, dass ein kugelförmiger Körper mit derselben Dichte wie die Sonne, aber dem 500-fachen Radius der Sonne ein Schwarzes Loch ist. (Der Sonnenradius beträgt $R_{So} = 6{,}96 \cdot 10^8$ m.)

3. Berechnen Sie auch die Dichte ρ, welche die Sonne (bei gleichem Radius R_{So}) mindestens haben müsste, damit sie ein Schwarzes Loch wäre. Vergleichen Sie diese Dichte auch mit der Dichte von Atomkernen.

4. Berechnen Sie auch den maximalen Radius, den die Erde haben dürfte, damit sie ein Schwarzes Loch wäre.

3. In dem genannten Grenzfall gilt $C = 1$, also

$$1 = 2 \cdot \frac{G \cdot M}{c^2 \cdot R_{So}} = 2 \cdot \frac{G \cdot \rho \cdot V}{c^2 \cdot R_{So}} = 2 \cdot \frac{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R_{So}{}^3}{c^2 \cdot R_{So}} = \frac{8 \cdot \pi \cdot G \cdot R_{So}{}^2 \cdot \rho}{3 \cdot c^2}.$$

Daher ist

$$\rho = \frac{3 \cdot c^2}{8 \cdot \pi \cdot G \cdot R_{So}{}^2} \qquad (6)$$

Die numerische Berechnung ergibt:

$$\rho := \frac{3 \cdot c^2}{8 \cdot \pi \cdot G \cdot R_{So}{}^2} \quad \Leftrightarrow \quad \rho \approx 3,319 \cdot 10^8 \ \frac{kg}{m^3}$$

Die Dichte musste also mindestens

$$\rho = 3,319 \cdot 10^8 \ \frac{kg}{m^3} = 3,319 \cdot 10^5 \ \frac{g}{cm^3}$$

betragen. Verglichen mit der Dichte von Atomkernen ist dies eine riesige Dichte. Der Kern des Lithiums hat eine Dichte von etwa $0,53 \frac{g}{cm^3}$, der Kern des Elementes Gold hat etwa die Dichte $19,3 \frac{g}{cm^3}$.

Das würde bedeuten, dass die Sonne mehr als 10.000 mal so dicht wie der Atomkern von Gold sein müsste!

4. Nach unseren bisherigen Betrachtungen ist der maximale Radius definiert durch $\qquad r_{max} = R_S$

Mit der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit $c = 299,7925 \cdot 10^6 \ \frac{m}{s}$ und der Erdmasse $m_E = 5,974 \cdot 10^{24}$ kg findet man für die Erde:

$$r_{max} = 2 \cdot \frac{G \cdot m_E}{c^2} = 2 \cdot \frac{6,672 \cdot 10^{-11} \ \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \ kg}{(299,7925 \cdot 10^6 \ \frac{m}{s})^2}$$

$$\approx 8,87 \cdot 10^{-3} \ m = 8,87 \ mm$$

Das ist kleiner als ein Gummibärchen.