III.45

Form und Raum

Figurierte Zahlen in Ebene und Raum

Dr. Doris Bocka
Illustrationen von Sylvana R.-E. Timmer

© Colourbox

Mit dem Thema figurierte Polyederzahlen können Sie das spannende Thema von figurierten Zahlen von der Ebene in den Raum fortsetzen. Dabei nutzen die Schülerinnen und Schüler beim handlungsorientierten Zusammenarbeiten die Darstellungsform der Polyeder.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	5/6
Dauer:	2–4 Unterrichtsstunden
Inhalt:	Ableitung von Zusammenhängen bei figurierten Zahlen in Ebene und Raum. Erkennen von Mustern und Formen.
Kompetenzen:	Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mathematisch kommunizieren (K6)
Ihr Plus:	Handlungsorientierung und Bearbeitungsstrategien

Auf einen Blick

Üb = Übung, Gl = Grundlagen

1./2. Stunde

Thema: **Tetraederzahlen**

M 1 (Üb) Tetraederzahlen
M 2 (Gl) Infoblatt: Entstehung von Polyederzahlen

Benötigt:
- ☐ 20 Orangen oder Mandarinen (möglichst etwas flacher)
- ☐ alternativ 20 Plättchen für OH-Projektor
- ☐ OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard
- ☐ Folienkopie bzw. digitale Fassung von M 1 und ggf. von M 2
- ☐ GeoGebra-Datei auf CD 49
- ☐ Notizblock

CD 49

3. Stunde

Thema: **Pyramidenzahlen**

M 3 (Üb) Pyramidenzahlen

Benötigt:
- ☐ OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard
- ☐ Folienkopie bzw. Word-Fassung von M 3 und M 2
- ☐ GeoGebra-Datei auf CD 49
- ☐ DIN-A4-Hefte (blanko)

CD 49

4. Stunde

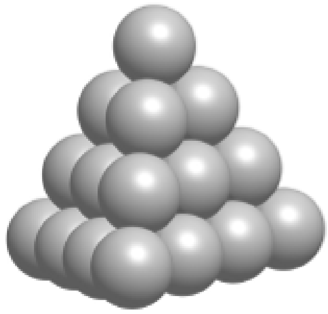
Thema: **Doppelpolyederzahlen**

M 4 (Üb) Doppeltetraederzahlen
M 5 (Üb) Doppelpyramidenzahlen
M 6 (Gl) Infoblatt: Weitere figurierte Polyederzahlen
M 7 (Gl) Übersicht: Figurierte Zahlen in Ebene und Raum

Benötigt:
- ☐ OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard
- ☐ Folienkopie mit nicht permanenten Folienstiften bzw. Word-Fassung von M 4 und M 5, eventuell M 6 und M 7
- ☐ GeoGebra-Datei auf CD 49
- ☐ Notizblock
- ☐ evtl. Körpermodelle Tetraeder, Hexaeder, Würfel, Pyramide, Oktaeder, fünfseitige Pyramide

CD 49

M 1 Tetraederzahlen



Aufgabe 1
Die geometrische Form des oben dargestellten Körpers heißt Tetraeder. Die Grundfläche ist ein Dreieck. Schätze, wie viele Kugeln sich im gesamten Stapel befinden.

Mache eine Skizze, wie viele Kugeln sich in einer Schicht befinden. Beginne von oben.

Schicht 1 Schicht 2 Schicht 3 Schicht 4

Was fällt dir auf?

Aufgabe 2
Wie viele Kugeln brauchst du für die nächste Schicht?

Wie geht es weiter? Fülle die Tabelle aus.

Hinweis
Die zugrunde liegende Zahlenfolge heißt Tetraederzahlen.

Kugelstapel als Tetraeder	Anzahl pro Schicht	Anzahl gesamt
Schicht 1	1	1
Schicht 2		
Schicht 3		
Schicht 4		
Schicht 5		
Schicht 6		
Schicht 7		
Schicht 8		

Wie entsteht die Gesamtzahl des Tetraeders?

____

Tipp: Denke an die einzelnen Schichten.

Notiere als Formel: $\mathbf{T}_n$ = ______________________________

Aufgabe 3

Die folgende Darstellung heißt Pascal'sches Dreieck. Der Name geht auf den französischen Mathematiker Blaise Pascal zurück, der im 17. Jahrhundert gelebt hat. Das Pascal'sche Dreieck wird gebildet, indem du immer zwei Zahlen, die nebeneinander stehen, addierst und das Ergebnis darunter einträgst. Fülle die Lücken aus.

1
1 1
1 2 1
1 3 ____ 1
1 ____ ____ ____ 1
1 5 10 ____ ____ 1
1 ____ ____ ____ ____ ____ 1
1 ____ 21 ____ ____ ____ ____ 1
1 ____ ____ 56 ____ ____ ____ ____ 1

Aufgabe 4

Im obigen Dreieck sind mehrere Zahlenfolgen versteckt. Drei Zahlenfolgen wollen wir uns näher betrachten. Das erste Glied der Zahlenfolge ist durch die eingekreisten Zahlen vorgegeben. Wähle eine Farbe für je eine der Zahlenfolgen und kreise die Glieder ein. Notiere unten die drei Zahlenfolgen.

____

____

____

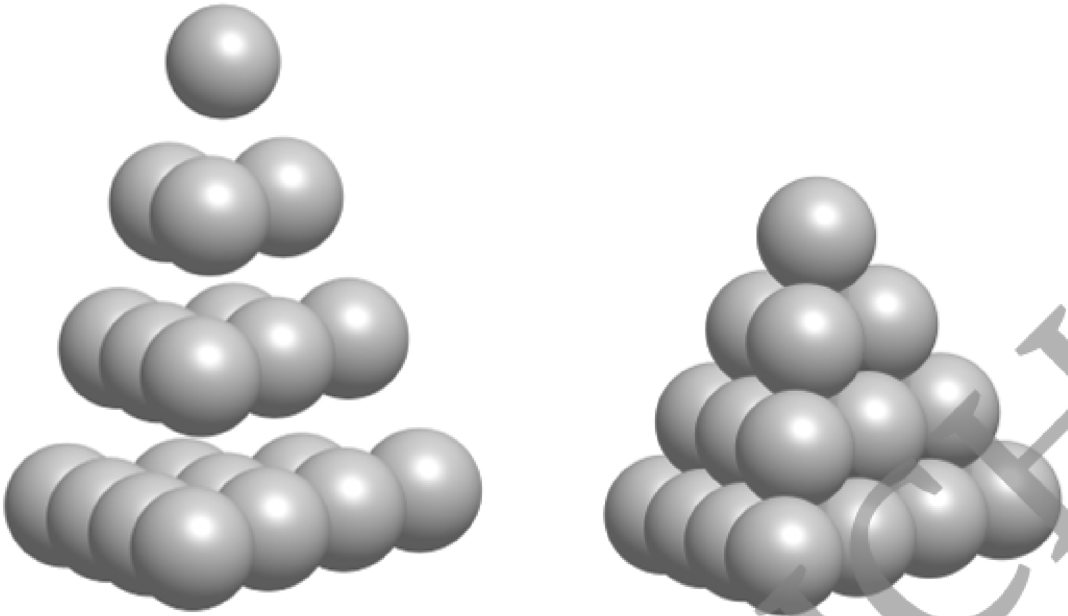
Tipp: Betrachte die Diagonalen links und rechts.

Was fällt dir auf?

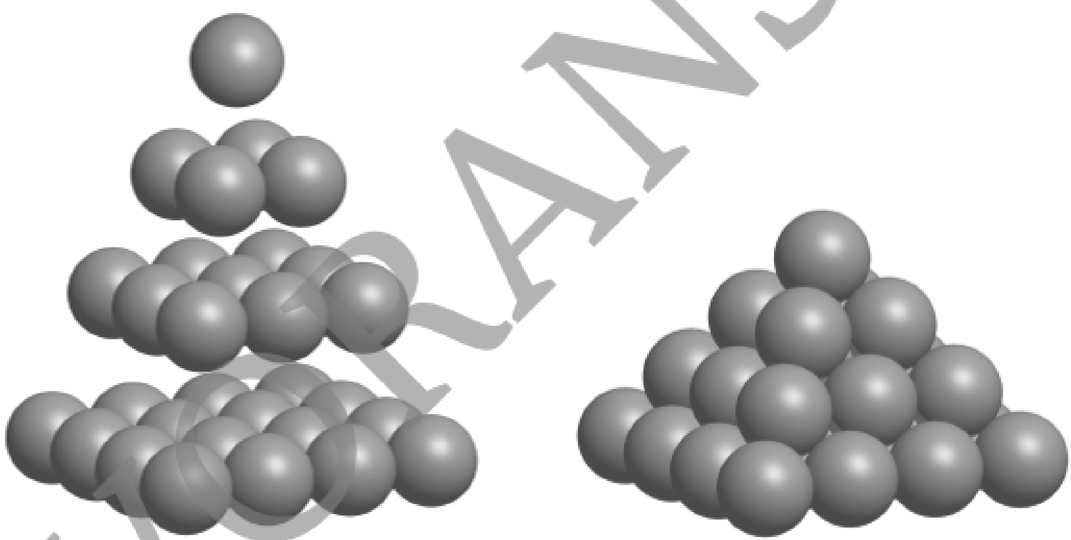
____

Infoblatt: Entstehung von Polyederzahlen M 2

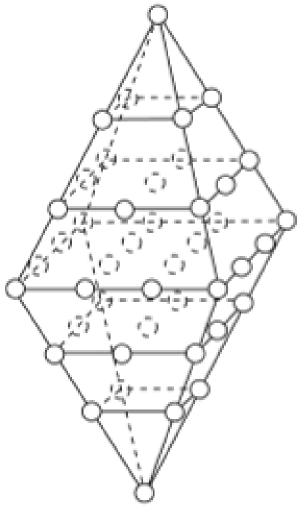
Entstehung von Tetraederzahlen

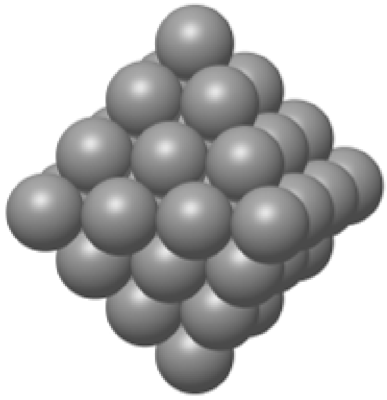


Entstehung von Pyramidenzahlen



M 5 Doppelpyramidenzahlen





Grafik: Sylvana R.-E. Timmer

Aufgabe 1

Wenn du eine Pyramide nach unten spiegelst, erhältst du eine Doppelpyramide. Wie viele Seitenflächen hat sie?

____

> **Hinweis**
> Der Körper gehört zu den Platonischen Kör-pern. Bei diesen sind alle Seitenflächen gleich.

Das altgriechische Wort für diese Anzahl ist „okta". Wie heißt dieser Körper?

____

Aufgabe 2

Notiere die Zahlenfolge der oben abgebildeten Doppelpyramide:

DP_4 = ______ + ______ + ______ + ______ + ______ + ______ + ______

Tipp: Gehe Schicht für Schicht vor.

Notiere auch die Zahlenfolgen der kleineren und der nächstgrößeren Doppelpyramide als Summe mit dem Ergebnis.

DP_1 = 1

DP_2 = 1 + ______ + 1 = ______

DP_3 = 1 + ______ + ______ + ______ + 1 = ______

DP_4 = ______ + ______ + ______ + ______ + ______ + ______ + ______ = ______

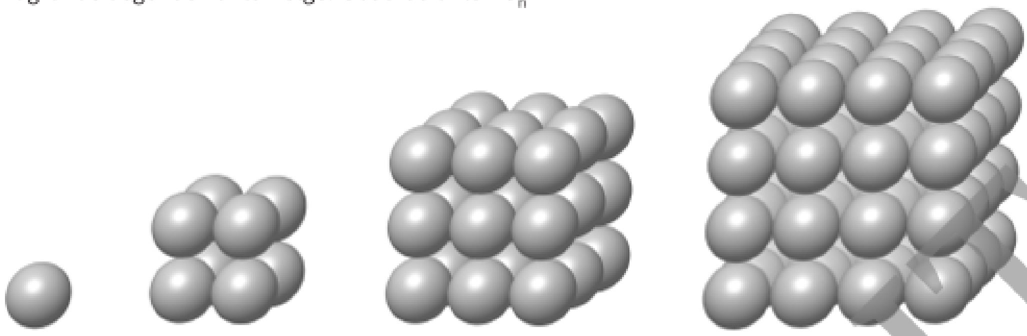
DP_5 = ______________________________

Tipp: Füge zuerst die nächste Grundfläche dazu.

M 6 Infoblatt: Weitere figurierte Polyederzahlen

Würfel als nicht zentrierte figurierte Polyederzahl (Platonischer Körper)

Zugrunde liegende Zahlenfolge: Quadratzahlen $Q_n = n^2$

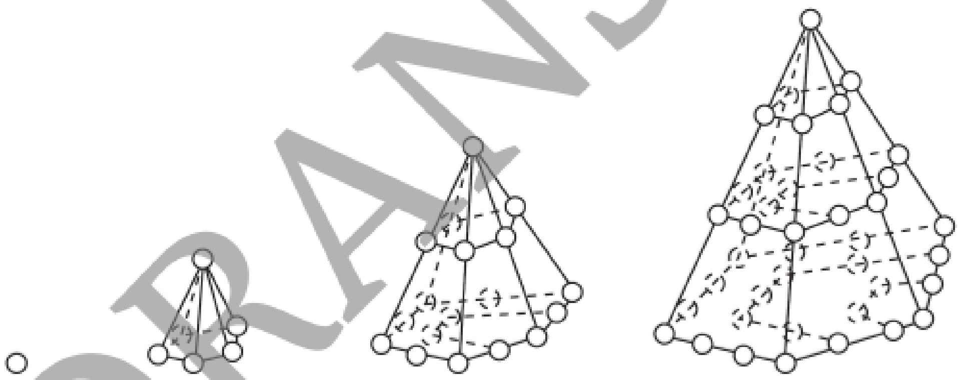


$W_1 = 1$ $W_2 = 8$ $W_3 = 27$ $W_4 = 64$

→ $\boxed{W_n = n^3}$

Fünfseitige Pyramide als zentrierte figurierte Polyederzahl

Zugrunde liegende Zahlenfolge: Fünfeckzahlen $F_n = \frac{1}{2}n \cdot (n-3)$



Grafik: Sylvana R.-E. Timmer

$FP_1 = 1$ $FP_2 = 6$ $FP_3 = 18$ $FP_4 = 40$

→ $\boxed{FP_n = \frac{1}{2}n^2 \cdot (n+1)}$