UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II

Buchstaben mathematisch betrachten

Lebensweltbezug im Unterricht leicht herstellen

Die Suche nach dem richtigen Partner

Wiederholen wichtiger Themen effektiv gestalten

Quadrate und Dreiecke

Altbekannte Figuren neu entdecken

Aufgaben rund um Rechtecke

Elementare Eigenschaften wiederholen

Weihnachtliche Dekoration mathematisch betrachtet

Berechnungen an einem Stern

Altes neu entdeckt

Höhen, Winkelhalbierende und Mittelsenkrechte vektoriell berechnet

Dichte Verpackung

Wie ordnet man optimal Zylinder in einem Karton an?

RAABE
KLASSE SCHULE

Schreiben von Buchstaben im Raum

Umrahmt man die Großbuchstaben des Alphabets und betrachtet die Breite und Höhe der Rahmen, so können die Buchstaben in mehrere Gruppen eingeteilt werden.

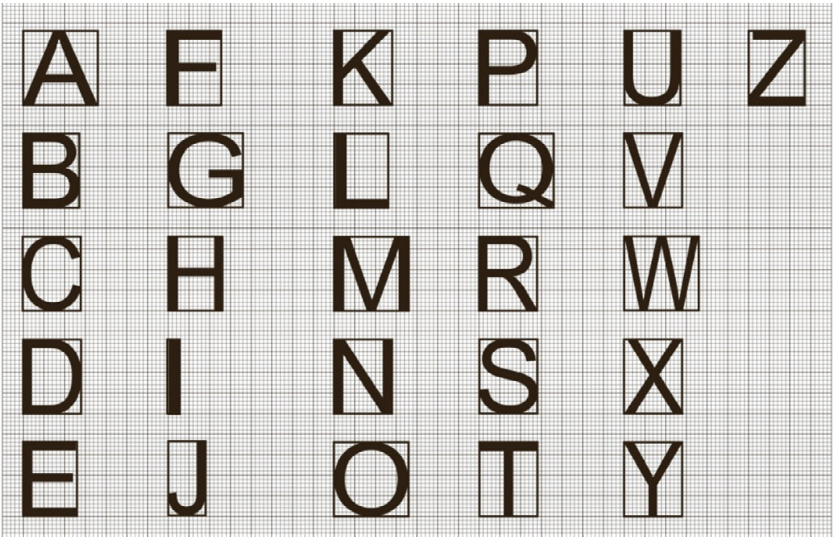

Abb. 1

Gruppe 1: Die Buchstaben werden von einem Quadrat begrenzt. Zu dieser Buchstabengruppe gehören die Buchstaben **A, G, M, O, Q** und **W.**

Gruppe 2: Die Buchstaben werden von einem Rechteck begrenzt, dessen Breite $\frac{3}{4}$ der Höhe ist. Zu dieser Buchstabengruppe gehören die Buchstaben **B, C, D, E, F, H, K, L, N, O, R, S, T, U, V, X, Y** und **Z.**

Der Buchstabe **J** ist ungefähr halb so breit wie hoch, beim Buchstaben **I** ist die Breite ungefähr $\frac{1}{6}$ der Höhe.

Einige der Buchstaben sollen auf einer quadratischen Tafel dargestellt werden. Die Eckpunkte dieser quadratischen Tafel sind A (0|0|0), B (0|10|0), C (-6|10|8) und D (-6|0|8).

1. Zur Konstruktion des Buchstabens A sind die Hilfspunkte A_1, A_2 und A_3 notwendig. A_1 ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$, A_2 (A_3) teilt die Strecke $\overline{AA_1}$ ($\overline{AA_2}$) im Verhältnis 3 : 5.

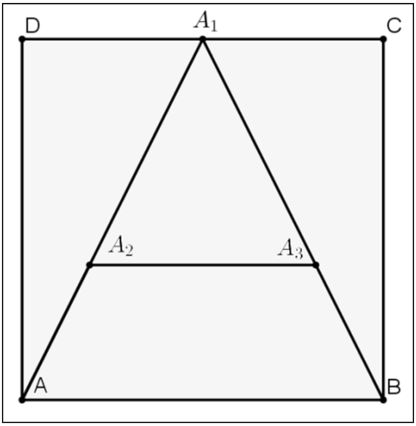

Abb. 2

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Hilfspunkte A_1, A_2 und A_3.
b) Geben Sie die Gleichung der Strecken $\overline{AA_1}$, $\overline{BA_1}$ und $\overline{A_2A_3}$ an.
c) Berechnen Sie die Gesamtlänge des Schriftzugs des Buchstabens A.
d) Berechnen Sie die Größe des Winkels an der Spitze des Buchstabens A.

2. Zur Konstruktion des Buchstabens G sind die Hilfspunkte M, G_A und G_E notwendig. M ist der Mittelpunkt des Quadrates und G_E der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$. G_A ist der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und dem Kreis um M mit dem Radius $\overline{MG_E}$.

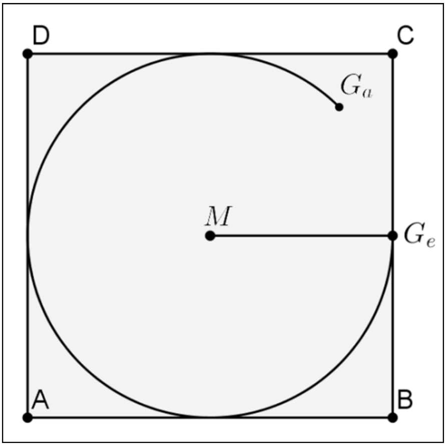

Abb. 3

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte M und G_E.

b) Zeigen Sie, dass alle Punkte X mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \cdot \sin(t) \\ 5 \cdot \cos(t) \\ 4 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$ in der durch die Punkte A, B und C gebildeten Ebene liegen und auf einem Kreis um M mit dem Radius $\overline{MG_E}$ liegen.
(Hinweis: Es gilt: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$)

c) Bestimmen Sie die Koordinaten von G_A.

d) Berechnen Sie die Länge des Schriftzugs des Buchstabens G.

3. Die umrandete Figur für den Buchstaben B ist das Rechteck AB_RC_RD, dessen Breite $\frac{3}{4}$ der Höhe ist.
Zur Konstruktion des Buchstabens B sind die Hilfspunkte M_1 und M_2 der beiden Kreisbögen notwendig.

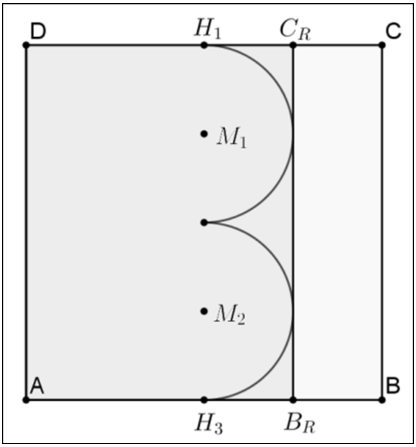

Abb. 4

a) Begründe, dass der Mittelpunkt M_1 des oberen Kreisbogens die Koordinaten $M_1\,(-4{,}5|5|6)$ hat.

b) Alle Punkte des Kreises, auf dem der obere Kreisbogen liegt, erfüllen die Bedingung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \cdot p \cdot \sin(t) \\ 5 \cdot p \cdot \cos(t) \\ 4 \cdot p \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $p > 0$ und beschreiben Sie, wie man $\vec{x}$ aus der Kreisgleichung für den Buchstaben G herleiten kann.

c) Der untere Kreisbogen kann durch Verschiebung aus dem oberen Kreisbogen hergeleitet werden. Geben Sie die Verschiebung und die Kreisgleichung für den Kreis, auf dem der untere Bogen liegt, an.

„Dichte Verpackungen" – optimale Anordnung von Kreisen in Rechtecken

Ein Unternehmen stellt zylinderförmige Dekorationsartikel her. Diese sollen auf verschiedene Arten verpackt werden. Um die Größe der benötigten Verpackung ermitteln zu können, wird die Grundfläche betrachtet.

1. Welche Maße muss eine Verpackung mit rechteckiger Grundfläche haben, um Zylinder mit einem Radius von r = 1 m verpacken zu können (Anordnung siehe Abb. 1)?

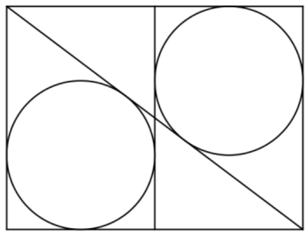

Abb. 1

2. Durch die Diagonale und die Vertikale wird die Verpackung nicht optimal ausgenutzt. Aus diesem Grund wurde eine andere Anordnung der Kreise gewählt (siehe Abb. 2).
   Wie breit muss eine Verpackung der Länge 3 m mindestens sein, damit in ihr zwei Kreise in der abgebildeten Anordnung mit Radius 1 m Platz haben?

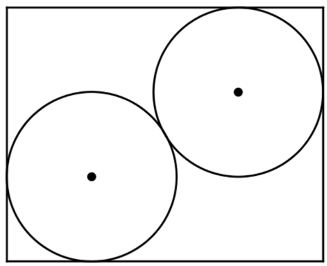

Abb. 2

3. a) Welche Kantenlänge a muss eine quadratische Verpackung haben, wenn auf die skizzierte Art (siehe Abb. 3) vier Zylinder mit dem Radius 1 m Platz haben sollen?

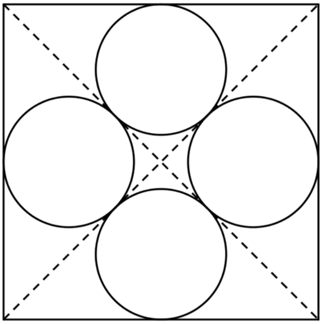

Abb. 3

b) Der nicht genutzte Platz soll durch fünf weitere Kreise (vier größere und ein kleinerer) teilweise aufgefüllt werden.
Um wie viel Prozent verbessert sich die Platzausnutzung?

Hinweise

a) Für den kleinen Kreis: Betrachten Sie das Dreieck MM_1M_2.

b) Für die vier größeren Kreise: Betrachten Sie die Dreiecke MAB und PQR. Leiten Sie daraus zwei Bedingungen her; eine für den Radius r der vier Kreise und eine für x = |PQ|.

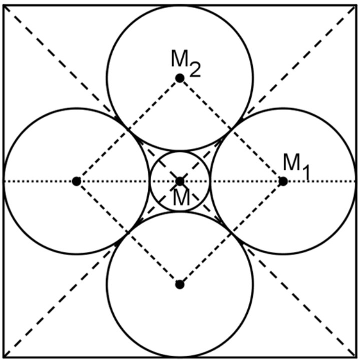

Abb. 4

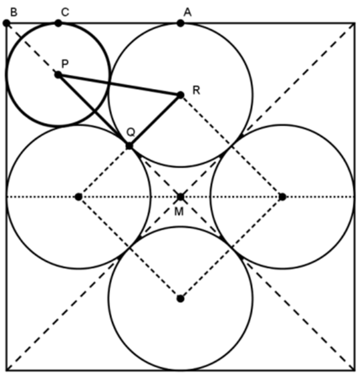

Abb. 5