Üben, knobeln und reflektieren – den Umgang mit Potenzen vielseitig trainieren

Von Tobias Jaschke, Uhingen

Illustrationen von: L. Oser und J. Lenzmann

Anhand dieser und ähnlicher Behauptungen trainieren die Lernenden das mathematische Argumentieren.

Klasse: 9/10

Dauer: je nach Materialauswahl 1 bis 10 Stunden (+ LEK)

Inhalt: Potenzrechengesetze verstehen, reflektieren und anwenden; die wissenschaftliche Schreibweise festigen und anwenden; Potenzgleichungen lösen

Ihr Plus:

- ✓ Spiele (**M 9–M 11**),
- ✓ Differenzierungsangebote, Lernerfolgskontrolle (**M 16**),
- ✓ Zusatzmaterial auf **CD-ROM 73**

Die Schüler reflektieren in diesem Beitrag die Potenzrechengesetze, sie wenden sie in verschiedenen Darstellungsformen an, lernen, geschickt zu rechnen, und vertiefen den Umgang mit Potenzen auf spielerische Weise. Auch ein Anwendungsbezug wird geschaffen.

Didaktisch-methodische Hinweise

Algorithmen anwenden und Zusammenhänge verstehen

Die Potenz- und Wurzelrechnung stößt sowohl bei Lernenden als auch bei Lehrenden in der Regel auf wenig Gegenliebe. Dies liegt vor allem daran, dass die Potenzrechnung oft sehr kalkülorientiert, wenig anschaulich und abstrakt vermittelt wird. Die Schüler müssen schwerpunktmäßig die Rechengesetze auswendig können und in mehr oder weniger formalen Standardaufgaben abarbeiten. Ein Verständnis sowie eine Einsicht in die innere Struktur der Potenzen und die Vorteile dieser Schreibweise werden häufig nicht erreicht. Dem möchte diese Übungseinheit entgegenwirken.

Vielseitiges und nachhaltiges Üben – das Besondere dieser Einheit

Üben wird hier nicht als klassisches Einüben mathematischer Algorithmen verstanden, sondern als immanenter Bestandteil des Unterrichts aufgefasst, in dem neben der Verbesserung mathematischer Fertigkeiten auch die Entwicklung prozessorientierter Kompetenzen eine bedeutende Rolle spielt. Auch das Entdecken neuer Regeln und Anwendungsbereiche der Potenzrechnung wird immer wieder thematisiert. Kurz: Die Materialien dieser Einheit sind eine Zusammenstellung produktiver und teils selbstdifferenzierender Übungsaufgaben, die zu einer inhaltlichen Vertiefung und aktiven Auseinandersetzung mit diesem Gebiet führen. Die Materialien stellen so eine abwechslungs- und umfangreiche Ergänzung zum Schulbuch dar.

Lernvoraussetzungen

Mit Beginn dieser Übungseinheit sollten Sie folgende Regeln für das Rechnen mit Potenzen eingeführt haben:

- Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Basis
- Multiplikation und Division von Potenzen mit gleichem Exponenten
- Potenzieren von Potenzen
- Zusammenfassen von Potenzen
- negative Exponenten

Die wissenschaftliche Schreibweise von Potenzen können die Lernenden hier erarbeiten.

Verschiedene Schwerpunkte – was wird jeweils geübt?

In den Materialien **M 1**, **M 4**, **M 12** und teilweise in **M 7** liegt der Schwerpunkt auf einem **reflexiven und operativen Üben**. Die Lernenden wenden Potenzrechengesetze rückwärts an, überprüfen die Voraussetzungen für eine korrekte Anwendung und erleben, dass es zu einer Problemstellung mehrere richtige Ergebnisse geben kann.

Begründungen mathematischer Regeln werden im Mathematikunterricht teilweise sehr stiefmütterlich behandelt. Oft begnügt man sich mit einem Beispiel, um einen allgemeinen Zusammenhang zu fixieren. **M 2** und **M 3** führen den Schülern algebraische Begründungen vor Augen, indem vermutete Regeln mithilfe von Variablen allgemein nachgewiesen werden.

Selbstdifferenzierende Aufgaben ermöglichen eine Bearbeitung auf unterschiedlichen Niveaus. Umkehraufgaben wie in **M 1** und **M 9** tragen diesem Übungsprinzip ebenso Rechnung wie das Entwerfen eigener Beispiele oder Aufgaben in vielen Materialien. Darüber hinaus bieten die **Problemlöseaufgaben** in **M 6** und teilweise **M 7** sowie das

Auf einen Blick

Material	Thema	Stunde	Zusatz
M 1	**Mit Potenzen vor- und rückwärts rechnen** Potenzrechengesetze reflektieren und operativ üben	1.	
M 2	**Negative Exponenten – Regeln finden und begründen** Mathematische Argumentationen finden	2.	
M 3	**Ob das wohl stimmt? – Behauptungen begründen** Mathematische Argumentationen prüfen		
M 4	**Welches Rechengesetz gilt? – Fehler finden und verbessern** Konstruktiver Umgang mit Fehlern	3.	
M 5	**Kann sich der Taschenrechner irren? – Rechne nach!** Konstruktiver Umgang mit Fehlern		
M 6	**Mit Potenz-Termen mauern** Strategisch-systematisch Probleme lösen	4.	
M 7	**Knobeln, nachdenken und untersuchen + Zusatzmaterial** Terme reflektiert betrachten – Probleme lösen	5.	
M 8	**Mach dir ein Bild von Potenzen! + Zusatzmaterial** Ikonisieren und verstehen	6.	
M 9	**Gut gesetzt ist halb gewonnen! – Ein Würfelspiel** Spielerisch üben	7.	
M 10	**Stadt, Land, Fluss – mit Potenzen und Köpfchen + Lösung** Spielerisch üben		
M 11	**Pst! – Potenzpost** Spielerisch üben		
M 12	**Fit in den Potenzregeln? – Kleines Lerntempoduett** Umformen und vereinfachen	8.	
M 13	**Riesengroß und winzig klein – Zahlen in der wissenschaftlichen Schreibweise darstellen** Extreme Zahlen darstellen	9.	
M 14	**Atome und Planeten – die wissenschaftliche Schreibweise anwenden** Extreme Zahlen darstellen		
M 15	**Es geht auch ohne Taschenrechner! – Mit Potenzen geschickt rechnen + Zusatzmaterial** Rechenvorteile nutzen	10.	
M 16 LEK	**Potenzen rundum – fit für den Klapptest** Lernerfolgskontrolle	11.	

I/C

M 1 Mit Potenzen vor- und rückwärts rechnen

Potenzrechengesetze zu kennen und anwenden zu können ist wichtig und in vielen Situationen hilfreich. Aber kannst du die verschiedenen Gesetze auch rückwärts verwenden?

Beispiel: Stelle x durch verschiedene Terme dar. → $\frac{x^3}{x^2}$;

Aufgaben

1. Konstruiere verschiedene Aufgaben mit Potenzen, die alle das Ergebnis a^2 haben. Stelle die Aufgaben so, dass verschiedene Potenzrechengesetze zur Anwendung kommen.

   Vielleicht lassen sich sogar Potenzrechengesetze kombinieren?

2. Versuche, möglichst viele verschiedene Potenzdarstellungen der Zahl 81 zu finden. Rechne mit deinem Taschenrechner zur Kontrolle nach.

   Beispiel: Verschiedene Potenzdarstellungen der Zahl 1024 sind:

   2^{10}; $(-2)^{10}$; 4^5; $(-32)^2$.

3. Das Ergebnis einer Potenzrechnung soll a) 1296 bzw. b) $4x^3$ sein. Konstruiere verschiedene Aufgaben mit diesem Ergebnis.

   Beispiel: a) $3^4 \cdot 2^4 = 1296$

   Für Schnelle: Gib dir selbst einige Ergebnisse vor und konstruiere dazu verschiedene Aufgaben. Lasse sie dann von einem anderen Schnellen überprüfen.

4. Klammere bei diesen Summendarstellungen so weit wie möglich aus.

a) $12z^4 + 3xz^2 - 8z^6$ b) $(xy)^2 - \frac{1}{2}x^3y$ c) $(x^2)^3 + 3x^5$

   Für Schnelle: Gib dir selbst eine oder mehrere Summendarstellungen vor und klammere so weit wie möglich aus.

5. Klammere den Faktor x aus.

a) $1 + x$ b) $2x^{-10} - 3x + 4$ c) $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x^1 - x^0$

6. Multipliziere aus und benutze dabei die Potenzschreibweise.

a) $a^3b \cdot (a^5 + b - a^2b^{10})$ b) $6c^5 \cdot (-1cc^3 - 1)$

7. Ersetze die Fragezeichen, sodass die Rechnung stimmt.

a) $(-2a)^? = -8a^?$ b) $d^? \cdot d^? = 1$ c) $(?)^3 : (2y)^3 = 27$ d) $\left(\left((-3a)^2\right)^?\right)^{-4} = 6561\,a^8$

Für Experten:

Multipliziere aus. Verwende die binomischen Formeln.

a) $(3r^4 - 4t^4)^2$ b) $\left((2x^2)^{-6} + 1\right)\left(-1 + (2x^2)^{-6}\right)$ c) $\left(\frac{2}{5}y^{-1} + 0{,}8y^5\right)\left(\frac{2}{5}y^{-1} + 0{,}8y^5\right)$

Zur Erinnerung: die binomischen Formeln

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 3. $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

M 2 Negative Exponenten – Regeln finden und begründen

Du glaubst, du kennst alle Potenzrechenregeln? Hier wirst du sehen, dass man anhand von Beispielen „neue" Regeln erahnen und diese durch die Verwendung von Variablen begründen kann.

Aufgabe 1

a) Vergleiche, indem du die Potenzen ausrechnest. Fällt dir etwas auf? Notiere deine Erkenntnisse.

(1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$ und 5^4 (2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-3}$ und 9^3 (3) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$ und 7^2

b) Findest du weitere Beispiele? Schreibe sie auf und überprüfe durch Nachrechnen.

c) Kannst du den Zusammenhang allgemein darstellen? Lies den Tipp.

Tipp: Zusammenhänge oder Vermutungen kann man allgemein begründen (der Mathematiker sagt: beweisen), indem man anstelle der konkreten Zahlen „**Variablen**" verwendet. Variablen können für jede beliebige Zahl stehen.

Aufgabe 2

a) Vergleiche $\left(\frac{2}{3}\right)^{-6}$ und $\left(\frac{3}{2}\right)^{6}$ sowie $\left(\frac{5}{8}\right)^{-2}$ und $\left(\frac{8}{5}\right)^{2}$.

b) Suche weitere solche Beispiele und überprüfe sie durch Nachrechnen.

c) Schreibe eine Vermutung auf, wie man allgemein Brüche mit negativen Exponenten in Brüche mit positiven Exponenten umwandeln kann: Versuche, diese Vermutung allgemein – also mit Variablen – zu beweisen.

Aufgabe 3

a) Welche der folgenden Rechnungen sind richtig? Rechne nach.

$$1^1 = 1^2$$

$$2^2 + 2^2 = 2^3$$

$$3^3 + 3^3 + 3^3 = 3^4$$

$$4^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4 = 4^5$$

b) Schreibe eine weitere Rechnung dieser Art auf.

c) **Für Experten**

Schreibe eine allgemeine Regel auf. Kannst du diese begründen?

Tipp

Du kannst auch erst einmal versuchen, den linken Teil der Gleichungen oben als Produkt aufzuschreiben. Kannst du jetzt ein Potenzrechengesetz anwenden?

M 4 Welches Rechengesetz gilt? – Fehler finden und verbessern

Fehler stecken oft im Detail. Deshalb ist es wichtig, genau hinzuschauen. Das hilft dir auch in Prüfungen und Klassenarbeiten.

Tipp Denke immer an die Voraussetzungen für die einzelnen Potenzrechenregeln und frage dich: Wann gilt welche Regel?

Aufgabe 1

Welche der folgenden Rechnungen sind falsch? Finde die Fehler und verbessere sie.

Begründe deine Entscheidung bei jeder Aufgabe. Gib dabei die entsprechende Regel an.

a) $a^2 \cdot a^3 = a^6$

b) $(e^4)^6 = e^{24} = (e^2)^{12}$

c) $6^x \cdot 6^x = 36^x = 6^{x^2}$

d) $(3^2)^2 = 18$

e) $4^2 + 5^2 = 400$

f) $x^2\,(3x - 2y) = 4x^3 - 2x^2y$

g) $5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 5^5$

h) $\dfrac{k^8\,l^9}{k^2\,l^8} = k^4\,l$

Für Schnelle: Bilde selbst eine Aufgabe mit einem Fehler und lasse diesen von einem anderen Schnellen verbessern.

Aufgabe 2

Ayla rechnet die folgende Aufgabe: $\dfrac{a^3 \cdot b^{-4}}{a^{-4} \cdot b^3}$. Als Ergebnis erhält sie 1.

Findest du Aylas Denkfehler?

M 5 Kann sich der Taschenrechner irren? – Rechne nach!

Vertraust du deinem Taschenrechner? Vermutlich schon. Manchmal liefert er aber auch Ergebnisse, die uns verunsichern oder falsch erscheinen. Dann lohnt es sich, selbst nachzurechnen …

Aufgabe

Lea und Esra unterhalten sich über die Bestimmung sehr großer Quadratzahlen. Dazu tippen sie in den zehnstelligen Taschenrechner ein: 30 972 389 • 30 972 389. Nun diskutieren sie die Anzeige des Taschenrechners ($9{,}592888804 \cdot 10^{14}$):

a) Lies dir das Gespräch zwischen Lea und Esra mindestens zweimal genau durch.

b) Schreibe heraus, welche Fragen die beiden untersuchen.

c) Welche zentrale Frage stellen sie sich? Wie wollen sie vorgehen, um die Frage zu beantworten?

d) Bestimme die Quadratzahl von 30 972 389 mit dem im Text vorgeschlagenen Verfahren. Was stellst du fest?

e) Kontrolliere dein Ergebnis aus d), indem du schriftlich multiplizierst:

30 972 389 • 30 972 389.

f) Wie erklärst du dir den Unterschied zwischen deinem Ergebnis und dem des Taschenrechners?

Lea:	Was bedeutet denn diese Anzeige?
Esra:	Mal 10 hoch 14 bedeutet, dass man das Komma um 14 Stellen nach rechts verschieben muss. Das Ergebnis ist also 959 288 880 400 000.
Lea:	Aber das kann doch gar nicht sein! Bei der Zahl 30 972 389 ist doch die letzte Stelle eine 9, sodass die letzte Stelle im Ergebnis keine 0 sein kann, oder?
Esra:	Wieso denn nicht? Der Taschenrechner wird sich ja wohl kaum verrechnen!
Lea:	So genau weiß ich das auch nicht. Ich habe das aber mal irgendwo gelesen … Na ja, vielleicht stimmt's ja auch nicht.
Esra:	O.k., nehmen wir mal an, du hast recht. Wie lautet denn dann das richtige Ergebnis?
Lea:	Hm, wir könnten ja mal versuchen, die Ausgangszahl zu zerlegen, zum Beispiel in 30 970 000 + 2389, und dann mithilfe der binomischen Formel quadrieren …
Esra:	Du meinst also, wir sollen rechnen: $(3097 \cdot 10^4 + 2389)^2$?
Lea:	Ja, genau! So können wir die einzelnen Summanden exakt bestimmen und anschließend schriftlich addieren.
Esra:	O.k., versuchen wir's!

Zur Erinnerung

Die 1. binomische Formel lautet: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

M 7 Knobeln, nachdenken und untersuchen

Auch in der Mathematik muss man manchmal knobeln und gewinnt durch geschicktes Untersuchen Erkenntnisse. Hier kannst du es ausprobieren.

Knicke das Blatt entlang der gestrichelten Linien zweimal nach hinten um. Wenn du zu einer Aufgabe einen Tipp brauchst, falte das Blatt wieder einmal nach vorn zurück. Um deine Rechnung zu kontrollieren, musst du das Blatt dann ein zweites Mal nach vorn klappen.

Knicke hier um!

Aufgaben	Tipps	Lösungen
1. Worin besteht der Unterschied zwischen a) -2^4 und $(-2)^4$? b) $v^3 \cdot v^2$ und $(v^3)^2$? c) $h^4 + h^4$ und h^8?	Zu a) Worauf bezieht sich das Minuszeichen? Zu b) und c) Kannst du die Terme auch ohne Potenzschreibweise notieren?	a) $-2^4 = -16$ $(-2)^4 = 16$ b) $v^3 \cdot v^2 = v^5$ $(v^3)^2 = v^6$ c) $h^4 + h^4 = 2h^4 \neq h^8$
2. Rechne im Kopf. a) $(-1)^4 \cdot 6^2$ b) $43\,009\,088^0 \cdot (-1)^{40\,998} + 2$ c) $2^{-9} \cdot 2^{-1} \cdot 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^9 \cdot 2^{10}$	a) Die Potenzen von –1 sind relativ einfach. Warum? b) Der Exponent 0 ist ein besonderer Exponent. Warum? c) Kannst du immer zwei Potenzen zusammenfassen?	a) $1 \cdot 6^2 = 36$ b) $1 \cdot 1 + 2 = 3$ c) $(2^{-10} \cdot 1 \cdot 2^{10}) \cdot 2^{10}$ $1 \cdot 2^{10} = 1024$
3. Untersuche: Welche Zahl liegt genau in der Mitte von a) 10^0 und 10^4? b) 5^3 und 5^4? c) 2^{-3} und 2^3? Beschreibe, wie du bei den drei Aufgaben vorgegangen bist.	Kannst du die Zahlen auch ohne Verwendung der Potenzschreibweise notieren? Sagt dir der Begriff Mittelwert etwas?	a) 5000,5 b) 375 c) 4,0625 Man bildet den Mittelwert der beiden Zahlen: $\frac{1.\,\text{Zahl} + 2.\,\text{Zahl}}{2}$
4. Untersuche (zunächst an einigen Beispielen), wovon es abhängt, wie viele Nachkommastellen eine Potenz hat, deren Basis eine Dezimalzahl ist.	Spiele das doch mal für die Dezimalzahlen 1,2 und 1,22 durch.	Anzahl der Nachkommastellen der Potenz a^n = Wert des Exponenten • Anzahl der Nachkommastellen der Basis = $n \cdot m$ (wobei a m Nachkommastellen habe)
5. a) Schätze zunächst, wie viel Prozent 4^5 von 4^6 sind. Berechne anschließend den genauen Wert. b) **Für Knobel–Experten:** Die Potenz x^y sei ungefähr 33 % von der Potenz a^b. Knoble nach geeigneten Werten für a, b, x und y.	Überlege, was der Grundwert und was der Prozentwert ist. Achte auf die Formulierung „von“. Wie kannst du diese mathematisch ausdrücken?	a) $\frac{4^5}{4^6} = 4^{-1} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\,\%$ b) Mögliche Lösung: $\frac{x^y}{a^b} = \frac{3^5}{27^2} \approx 33{,}3\,\%$ x = 3, y = 5, a = 27 und b = 2

I/C

M 11 Pst! – Potenzpost

Du kennst bestimmt das Spiel *Stille Post*, bei dem es darum geht, einen bestimmten Begriff oder einen kurzen Satz flüsternd von Person zu Person weiterzugeben. Am Ende soll dann möglichst noch das Wort oder der Satz vom Anfang herauskommen.

Das Spiel *Potenzpost* ist ganz ähnlich. Allerdings werden hier keine Wörter oder Sätze weitergegeben, sondern verschiedene Darstellungen eines Terms oder einer Zahl. Und ihr gebt die Terme nicht mündlich, sondern schriftlich weiter.

So geht's

1. Bildet Vierergruppen. Der erste Spieler erhält eine Karte mit einem Term. Diesen Term wandelt er in eine andere Termform um, notiert diese auf einem Blatt und gibt es an den nächsten Spieler weiter. Dieser notiert wiederum auf einem neuen Blatt seine Termumformung und gibt diese weiter.

   <u>**Beispiel:**</u> $(xy)^4$ → x^4y^4 → $(x^2y^2)^2$ → $(-xy)^4$

   Ausgangsterm — Termumformungen

   Das Spiel wird leise gespielt. Erst am Ende gibt der letzte Spieler sein Ergebnis laut bekannt.

   Schafft ihr einen fehlerfreien Umlauf? Überprüft am Ende der Runde gemeinsam eure Terme. Legt sie offen auf den Tisch und erklärt sie, wenn Fragen aufkommen.

2. Legt in weiteren Spielrunden den Startterm mit Potenzen selbst fest. Achtet darauf, dass er sich mindestens einmal umformen lässt. Jeder Spieler sollte einmal beginnen.

Leichte Termkärtchen

x^{2x}	64	y^2x^2	$16z^4$	x^9y^4
81	x^{20}	$(xy)^4$	y^{2^4}	$(-1)^x$

Schwere Termkärtchen

$(16x)^{2x}$	$\frac{1024}{x^{10}}$	$y^{-2}x^{-2}$	$0{,}0001z^4$	$(x^8y^9)^2$
$2197x^3$	x^{-400}	$(xy)^{3^4}$	$x^{16}y^{2^4}$	$-(-1)^{5x}$

I/C

M 13 Riesengroß und winzig klein – Zahlen in der wissenschaftlichen Schreibweise darstellen

In der Mathematik gibt es einen Trick, sehr große oder sehr kleine Zahlen zu schreiben.

Zur Erinnerung: die wissenschaftliche Schreibweise

Sehr große und sehr kleine Zahlen lassen sich in der Potenzschreibweise besser darstellen. Um diese Zahlen schnell erfassen und mit anderen Zahlen vergleichen zu können, hat man sich in der Mathematik darauf verständigt, eine einheitliche Schreibweise zu verwenden – die wissenschaftliche Schreibweise.

Eine Zahl ist in der wissenschaftlichen Schreibweise dargestellt, wenn sie als Produkt einer Dezimalzahl mit einer Ziffer vor dem Komma (nicht 0) und einer Zehnerpotenz geschrieben wird.

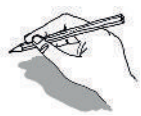
Beispiele $2{,}5 \cdot 10^9$ → Um zur normalen Schreibweise zu gelangen, verschiebst du das Komma um 9 Stellen nach rechts: 2 500 000 000.

$1{,}88889 \cdot 10^6$ → Verschiebe das Komma um 6 Stellen nach rechts: 1 888 890.

$2{,}27 \cdot 10^{-5}$ → negativer Exponent: Verschiebe das Komma um 5 Stellen nach links: 0,0000227.

Aufgabe 1

a) Schreibe die Zahlen in der wissenschaftlichen Schreibweise:



(1) 4 993 595 000

(2) 100 500 000 000 000 000

(3) 50 000 000 000 000 000 000 000 000 000

(4) 0,000034

(5) 0,000000000000002343

b) Gib dir selbst einige Zahlen vor und überführe diese in die wissenschaftliche Schreibweise. Lasse sie von deinem Sitznachbarn kontrollieren.

c) Beschreibe, wie du vorgehst, wenn du eine Zahl in die wissenschaftliche Schreibweise überführst. Unterscheide zwischen sehr großen und sehr kleinen Zahlen.

Aufgabe 2

a) Ordne die Zahlen der Größe nach:

$5{,}17 \cdot 10^5$ $0{,}517 \cdot 10^0$ $0{,}517 \cdot 10^{-4}$ 0,5177 $5{,}17 \cdot 10^9$

b) Jetzt wird's knifflig. Ordne wieder der Größe nach:

$2{,}234 \cdot 10^2$ $223{,}4 \cdot 10^1$ $0{,}2234 \cdot 10^2$ 0,0002234

$2\,234\,000 \cdot 10^{-8}$ $2{,}234 \cdot 10^0$

c) Entwickle eine eigene Aufgabenstellung (mit Lösung) ähnlich wie in a) und lasse sie von deinem Sitznachbarn lösen.

Aufgabe 3

Wandle die Zahlen aus Aufgabe 2a) und b) in die normale Schreibweise um.

Für Experten

Konstruiere sechs verschiedene Darstellungen der Zahl 7,5603. Lasse von deinem Nachbarn überprüfen, ob alle Darstellungen richtig sind.

M 14 Atome und Planeten – die wissenschaftliche Schreibweise anwenden

Wir empfinden Größenordnungen, die wir mit unseren Sinnen erfassen können, als passend und naturgegeben. An diese Dimensionen haben wir uns gewöhnt und können uns etwas darunter vorstellen. In den Naturwissenschaften und der Astronomie gibt es aber viele Situationen, in denen sehr kleine und sehr große Zahlen vorkommen, die wir uns nicht mehr vorstellen können. Hier findest du einige Beispiele.

Aufgaben

1. Der Durchmesser eines Atoms beträgt etwa ein zehnmillionstel Millimeter. Schreibe diese Zahl als Potenz.
2. Stell dir vor, dein Opa wird 70 Jahre alt und du willst ihm für jede Sekunde seines bisherigen Lebens 1 Milliarde Goldatome schenken. Ein Goldatom wiegt $3 \cdot 10^{-25}$ kg. Welche Goldmenge wäre das? Gib sie in kg und g an.
3. Geldmünzen verlieren im Laufe der Zeit an Masse, weil sie im Geldbeutel aneinanderreiben. In 30 Jahren verlieren sie 56 Milligramm an Masse. Welche Masse hat ein „Geldstückatom“, wenn die Geldmünze im Laufe der 30 Jahre pro Sekunde 600 Milliarden Atome verliert? Gib die Masse auch in kg an.
4.

a) Schreibe die Volumen- und Oberflächenangaben in der Tabelle ohne Zehnerpotenzschreibweise. Drücke die Zahlen auch in Worten aus.

b) Wie oft passt der Mond in die Sonne?

c) Wie viel Prozent der Sonnenoberfläche macht die Erdoberfläche aus?

d) Die Masse des Planeten Neptun beträgt etwa 18,1 % der Masse des Planeten Saturn (Saturnmasse = $5{,}69 \cdot 10^{26}$ kg). Welche Masse hat Neptun?

Bild: colourbox

Blick ins Weltall: Erde und Mond

	Erde	Mond	Sonne
Volumen	$1{,}083 \cdot 10^{12}$ km³	$2{,}199 \cdot 10^{10}$ km³	$1{,}412 \cdot 10^{18}$ km³
Oberfläche	$5{,}10 \cdot 10^{8}$ km²	$3{,}80 \cdot 10^{7}$ km²	$6{,}09 \cdot 10^{12}$ km²

5. Der MAK-Wert (maximale Arbeitsplatzkonzentration) gibt an, wie hoch die maximal erlaubte Konzentration bestimmter Stoffe in der Atemluft sein darf. In der Tabelle siehst du einige MAK-Werte von gesundheitsgefährdenden Stoffen. Ermittle jeweils den ungefähren prozentualen Anteil der Stoffe an der Atemluft, die diese maximal haben dürfen.

Hinweis: 1 m³ Luft wiegt 1,290 kg.

Schadstoff	Kohlenmonoxid	Kohlendioxid	Stickstoffdioxid	Schwefeldioxid	Ozon
MAK-Wert (in mg/m³)	35	9100	9	1,3	0,2

Foto: colourbox

Tragen zur Luftverschmutzung bei: Kohlekraftwerke

Lösungen und Tipps zum Einsatz

M 1 Mit Potenzen vor- und rückwärts rechnen

Rechengesetze drücken allgemeingültige Termzusammenhänge aus. Sie sind also nicht nur von links nach rechts lesbar, sondern ebenso von rechts nach links. Um einem einseitigen Schematisieren entgegenzuwirken, üben die Schüler hier vor allem in Umkehraufgaben, die Potenzrechengesetze auch reversibel zu verwenden.

Wenn Sie die Ergebnisse gemeinsam mit der Klasse besprechen, nehmen Sie auch die Lösungswege in den Blick und lassen Sie die Lernenden erklären, wie sie vorgegangen sind.

Schnellere Lernende werden zusätzlich gefordert, indem sie eigene Aufgaben nach den vorgegebenen Mustern konstruieren und die Zusatzaufgaben bearbeiten.

Lösungen

1. $a^{-10} \cdot a^{12}$; $\frac{a^4}{a^2}$; $a^0 \cdot a^2$; $\frac{(a^4 \cdot a^3)}{a^5}$; $\frac{(a^2)^3}{a^4}$ …
2. 3^4; 9^2; $\frac{9^7}{9^5}$; …
3. a) $2^{10} + 3^5 + 29^1$; $10^3 + 4^4 + 2^2 \cdot 10$; … b) $2^2 \cdot x^4 \cdot x^{-1}$; $2x^3 \cdot 2$; …
4. a) $z^2(12z^2 + 3x - 8z^4)$ b) $x^2y\left(y - \frac{1}{2}x\right)$
   c) $x^5(x + 3)$
5. a) $x\left(\frac{1}{x} + 1\right)$ b) $x\left(2x^{-11} - 3 + \frac{4}{x}\right)$
   c) $x\left(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 - \frac{1}{x}\right)$
6. a) $a^8b + a^3b^2 - a^5b^{11}$ b) $-6c^9 - 6c^5$
7. a) ? = 3 → $(-2a)^3 = -8a^3$ b) ? = 0 → $d^0 \cdot d^0 = 1$
   c) ? = 6y → $(6y)^3 : (2y)^3 = 27$
   d) ? = –1 → $\left(\left((-3a)^2\right)^{-1}\right)^{-4} = 6561\,a^8$

Für Experten:

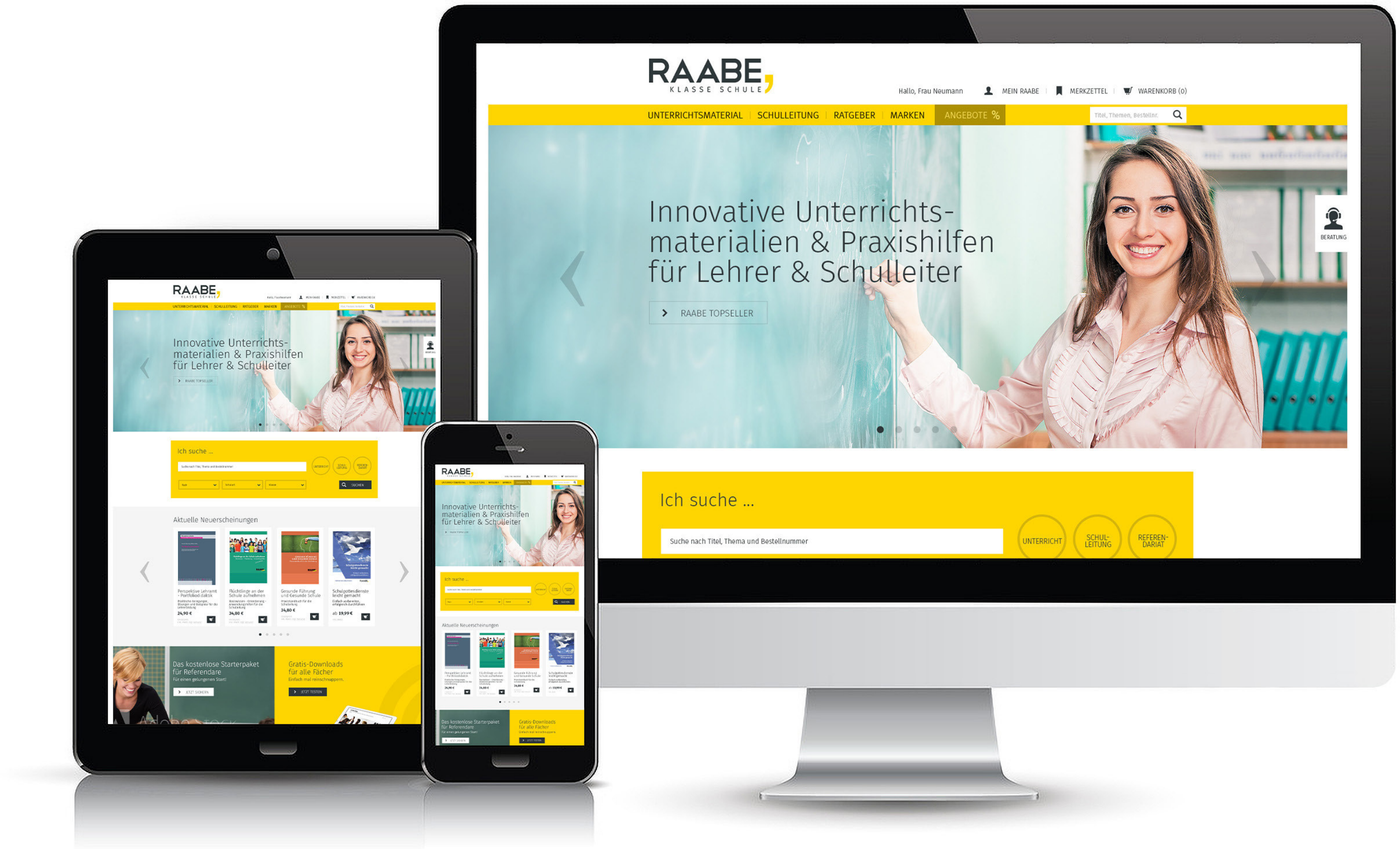
a) $9r^8 - 24r^4t^4 + 16t^8$ b) $2^{-12}x^{-24} - 1$ c) $\frac{4}{25}y^{-2} + \frac{16}{25}y^4 + \frac{16}{25}y^{10}$

M 2 Negative Exponenten – Regeln finden und begründen

Potenzen mit negativem Exponent

Die Bedeutung von Potenzen mit negativen Exponenten und deren unterschiedliche Schreibweisen sollten vor der Bearbeitung von **M 2** im Unterricht behandelt worden sein, da die entsprechenden Umformungsregeln bei den verschiedenen „Beweisen“ benötigt werden. Grundsätzlich geht es bei allen drei Teilaufgaben darum, durch eigenständiges Explorieren und Überprüfen nach neuen und bislang unbekannten mathematischen Mustern und Strukturen zu suchen und diese zu begründen.

Der RAABE Webshop:
Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de