

# UNTERRICHTS MATERIALIEN

## Wahrscheinlichkeits- rechnung und Statistik



**Simulation zufälliger Ereignisse**

Beispiele aus dem Alltag

## Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Ausgabe 4/2018

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für die elektronische oder sonstige Vervielfältigung, Übersetzung, Verbreitung und öffentliche Zugänglichmachung.

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und angefragt. Sollten dennoch an einzelnen Materialien weitere Rechte bestehen, bitten wir um Benachrichtigung.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH  
Ein Unternehmen der Klett Gruppe  
Rotebühlstraße 77  
70178 Stuttgart  
Telefon +49 711 62900-0  
Fax +49 711 62900-60  
schule@raabe.de  
www.raabe.de

Redaktion: Anna-Greta Wittnebel  
Satz: ESM Satz und Grafik GmbH, Berlin  
Illustrationen: Chr. Grundmann, J. Lenzmann, W. Zettlmeier  
Bildnachweis Titel: Grapelimages\_Istockphoto\_Getty\_Images\_Plus  
Korrektur: Johanna Stotz, Wyhl a.K  
Druck: Drukarnia Dimograf Sp z o.o., ul. Legionów 83, 43-300 Bielsko-Biała, Polen

Gedruckt auf chlorfrei gebleichtem Papier

## Simulation zufälliger Ereignisse – Beispiele aus dem Alltag

### 1 Elchtest – jetzt am Computer?

#### Elchtest

Beim Elchtest wird mit der Geschwindigkeit von 65 km/h einem auf der Fahrbahn liegenden Hindernis durch einen schnellen doppelten Spurwechsel auf einer Entfernung von 50 m ausgewichen.

Was war das für eine Aufregung bei den Autobauern von Mercedes, kurz vor der Auslieferung der ersten Autos der „A-Klasse“:

Bei einer letzten Testfahrt in Schweden kippt ein Auto beim sog. Elchtest (siehe Kasten) auf das Dach. Das Ansehen der Marke war stark beschädigt. Mercedes musste in alle Wagen der A-Klasse zusätzlich ein elektronisches Stabilisierungsprogramm (ESP) kostenlos einbauen.

So etwas soll nicht noch einmal passieren.

Am Computer werden vor dem Bau des ersten Autos Fahrten auf verschiedenen Teststrecken simuliert. Das heißt, dem Computer werden alle wichtigen Informationen über das Auto (Motor, Getriebe, Bremsen, Größe, Gewichtsverteilung u. a.) eingegeben. Mit mehreren komplizierten Gleichungen kann der Computer sofort das Verhalten des Autos bei bestimmten Fahrbewegungen berechnen.

Bei kritischem Verhalten werden einzelne Komponenten des Autos so lange verbessert, bis der „Testfahrer“ alle möglichen Teststrecken ohne Probleme befahren kann.

1. Nicht nur Autobauer wollen durch Simulationen vorher wissen, was alles passieren kann. Auch andere Wissenschaftler denken sich Computermodelle aus, mit denen sie zukünftiges Verhalten simulieren können. Ihre Gründe dafür können jedoch verschieden sein.

Ergänze die folgende Tabelle mit mindestens einem Beispiel für jede Zeile:

Gründe für Simulationen	Beispiel
Realexperimente sind zu teuer.	
Realexperimente sind zu gefährlich.	
Realexperimente dauern zu lange.	
Für Realexperimente gibt es zu viele Möglichkeiten.	

- 1.2 Hin und wieder kommt es vor, dass trotz vorheriger Computersimulation z. B. eine neu gebaute Brücke den Belastungen nicht standhält. Woran kann das liegen?
- 1.3 Mit dem Computer lassen sich auch zufällige Ereignisse und Vorgänge simulieren. Ist das nicht ein Widerspruch?
- 2.1 Zufällige Vorgänge lassen sich manchmal gut durch einfache Zufallsexperimente simulieren. So kann das folgende Problem mit dem Werfen von drei Münzen simuliert werden:  
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Familie mit drei Kindern drei Mädchen hat?
- 2.1.1 Überlege dir ein Modell, das bei dieser Simulation mit Münzen gewählt werden kann und beschreibe es.  
Welche Annahmen hast du bei diesem Zufallsversuch über das Verhältnis Jungen und Mädchen sowie über die Münze gemacht? Sind diese berechtigt?  
Beantworte die eingangs gestellte Frage, indem du das gewählte Zufallsexperiment zwanzigmal durchführst.
- 2.1.2 Wiederhole das Zufallsexperiment noch zwanzigmal – aber diesmal mit Zufallszahlen aus der Tabelle auf Seite 3. Beginne in der Tabelle an einer beliebigen Stelle. Setze dann mit der darunter stehenden Zahl fort. Berichte nur die jeweils letzte Ziffer. Ist eine Spalte zu Ende, beginne rechts oben in der nächsten Spalte.  
Beschreibe das Modell, das diesmal dem Zufallsversuch zugrunde gelegt werden kann.
- 2.1.3 Welchen Vorteil haben Zufallsexperimente mit Zufallszahlen gegenüber „echten“ Zufallsexperimenten?
- 2.2 Zufallszahlen (auch die in der Tabelle auf Seite 3) werden meist nicht zufällig erzeugt, sondern berechnet. Deshalb heißen sie genaugenommen Pseudozufallszahlen. Die Rechenvorschrift, mit der sie erzeugt werden, heißt Zufallszahlengenerator.  
Erzeuge mithilfe des folgenden Verfahrens zehn Pseudozufallszahlen:  
(1) Wähle eine natürliche Zahl.

#### 4 Der strenge Herr Müller

In der Ganztagschule „Johannes Kepler“ können die Schüler selbst entscheiden, wann sie in der Zeit von 12.30 Uhr bis 13.45 Uhr im Speisesaal ihr Mittagessen einnehmen. Martin schmeckte es bisher immer recht gut, doch in letzter Zeit geht er gar nicht mehr gern zum Mittagessen. Der neue Biologielehrer, Herr Müller, ist furchtbar streng. Ständig hat er etwas auszusetzen. Und jetzt trifft er ihn auch noch dauernd beim Mittagessen – egal, ob er am Anfang oder am Ende der Mittagspause geht und obwohl beide jeweils nur 20 Minuten bleiben.

Das kann doch kein Zufall sein – oder doch?

Durch eine Simulation soll festgestellt werden, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass sich Martin und Herr Müller zufällig in der Mittagspause treffen.



Martin

4.1 Entwickle für diese Simulation ein Modell.

Überlege dazu

- welche Größen sich zufällig ändern,
- in welchem Intervall sich diese Größen ändern,
- wie diese Zufallszahlen erzeugt werden können,
- welche vereinfachenden Annahmen dabei gemacht werden können.

4.2 Simuliere mithilfe deines Modells das Ereignis „Treffen beim Mittagessen“ für einen Monat. Berechne die relative Häufigkeit des Ereignisses „Treffen“. Welche Schlussfolgerung ziehst du aus deinen Ergebnissen?

Die folgende Tabelle kann dir bei der Aufzeichnung deiner Ergebnisse helfen. Ein Beispiel ist schon eingetragen. Übertrage die Tabelle in dein Heft.

Nr.	Eintreffzeit von Martin	Eintreffzeit von Herrn Müller	Zeitdifferenz in Minuten	sie treffen sich	
				ja	nein
1	12:47	13:08	21		+

- 4.3 Vergleiche dein Ergebnis mit den Ergebnissen der anderen Lernenden in deiner Klasse.
- 4.4 Addiere mithilfe deiner Mitschüler schrittweise die Anzahl der „Treffer“. Berechne jedes Mal die relative Häufigkeit. Ergänze dazu die folgende Tabelle:

Anzahl der berücksichtigten Mitschüler	1	2	3	4	5	6	7	...
Anzahl der Treffer								
relative Häufigkeit								

Welche Schlussfolgerung kannst du aus dieser Tabelle ziehen?

## 5 Das Ziegenproblem

Eine der in den USA am heftigsten diskutierten mathematischen Aufgaben ist das Ziegenproblem. Golfkrieg-Piloten und CIA-Agenten, Banker und Mitarbeiter von Softwareunternehmen, Mathematikstudenten und Hausfrauen stritten darüber. Der Wissenschaftsjournalist Gero von Randow schrieb sogar ein ganzes Buch darüber!



© Grapelimages\_istockphoto\_City\_Images\_Plus

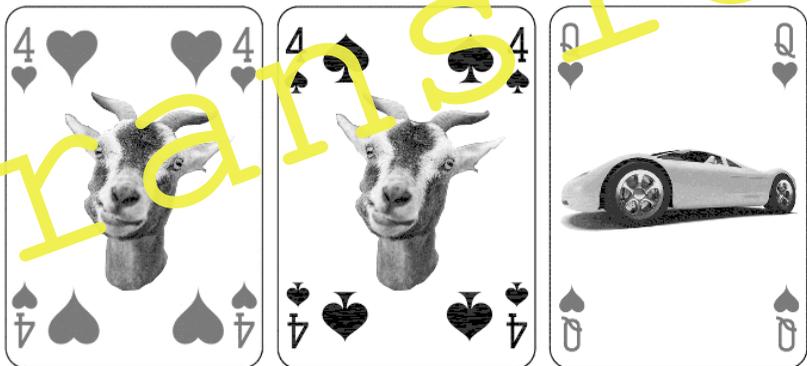
### Worum geht es eigentlich?

Stell dir vor, du nimmst im Fernsehen an einer Spielshow teil. Dir werden drei verschlossene Türen gezeigt. Hinter einer dieser Türen steht ein tolles Auto, hinter den anderen beiden stehen Ziegen. Du sollst jetzt auf eine Tür zeigen und wenn das Auto gerade hinter dieser steht, dann hast du es gewonnen. Du wählst dir also eine Tür aus. Nehmen wir an, es ist die Tür Nummer 1. Der Moderator weiß genau, hinter welcher Tür das Auto steht. Er geht zielgerichtet auf eine andere Tür zu – in diesem Fall auf die Tür 3. Mit den Worten „Ich zeige dir mal was“ öffnet er sie und eine Ziege schaut meckernd heraus. Er fragt dich jetzt: „Bleibst du bei Tür Nummer 1 oder willst du wechseln?“

- 5.1 Was meinst du? Sollte man wechseln? Hat man dann die größere Chance, das Auto zu gewinnen oder bleibt die Chance gleich? Begründe deine Entscheidung.
- 5.2 In Partnerarbeit soll das Problem durch eine Simulation genauer untersucht werden. Die drei Türen können zum Beispiel durch Spielkarten ersetzt werden.

Gehe dabei in folgenden Schritten vor:

- (1) Auf die Vorderseite einer Spielkarte wird das Bild eines Autos geklebt. Auf die Vorderseite der beiden anderen Karten kommen die Bilder von Ziegen.
- (2) Du einigst dich mit deinem Partner bzw. deiner Partnerin, wer zuerst der Moderator ist. Nach zehn Spielen wird gewechselt und es werden noch einmal zehn Spiele durchgeführt.



© Auto: Franck\_Boston\_iStockphoto\_Getty\_Images\_Plus

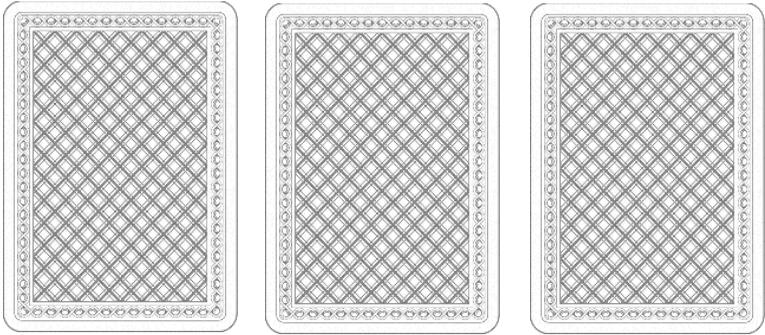
© Spielkarten: Imannaggia\_iStockphoto\_Getty\_Images\_Plus

© Ziege: Aris\_Su\_iStockphoto\_Getty\_Images

Der Spieler dreht jetzt dem Moderator den Rücken zu (nicht schummeln!).

Der Moderator ermittelt durch Würfeln, an welche Stelle die Karte mit dem Auto gelegt wird. Man kann z. B. beim Würfeln einer 1 und 4 festlegen, dass die Karte mit dem Auto auf Platz 1 kommt usw.

Die Karten werden mit der Rückseite nach oben auf den Tisch gelegt.



© Imannaggia\_iStockphoto\_Getty\_Images\_Plus

- (3) Der Spieler kann sich jetzt wieder umdrehen.

Er wählt eine Karte. Der Moderator dreht eine der beiden anderen Karten um. Es darf aber nicht die Karte mit dem Auto sein.

Er fragt dann den Spieler: „Bleibst du bei der gewählten Karte oder willst du wechseln?“



© Rückseite Spielkarten: Imannaggia\_iStockphoto\_Getty\_Images\_Plus

© Ziege: Aris\_Su\_iStockphoto\_Getty\_Images

- (4) Der Spieler entscheidet sich und dreht die von ihm gewählte Karte um.
- (5) Im Protokoll wird für jedes Spiel festgehalten, ob der Spieler gewechselt und ob er gewonnen hat.

## Das Ziegenproblem

Was meinst du? Soll man wechseln? Begründe deine Antwort!

(1) So sehen die Karten aus:



© Auto: Franck\_Boston\_iStockphoto\_Getty\_Images\_Plus

© Spielkarten: Imannaggia\_iStockphoto\_Getty\_Images\_Plus

© Ziege: Aris\_Su\_iStockphoto\_Getty\_Images

(3) Bleibst du bei der gewählten Karte oder willst du wechseln?



© Rückseite Spielkarten: Imannaggia\_iStockphoto\_Getty\_Images\_Plus

© Ziege: Aris\_Su\_iStockphoto\_Getty\_Images

## 7 Ein Witz macht die Runde

Susanne hat von ihrem Papa folgenden Witz gehört:

Ein Mathematiklehrer hat Pausenaufsicht und schaut nacheinander in alle Unterrichtsräume, ob denn auch alle Schüler in der großen Pause auf den Hof gegangen sind. Als er die Tür zum Klassenraum öffnet, sieht er drei Schüler. Er ruft: „Aber nun macht, dass ihr nach draußen kommt“, und schließt die Tür wieder. Nach einer Minute verlassen fünf Schüler den Raum.



Drei sind noch im Klassenraum.

D. Collins J. Hollender Digital  
Vision/Getty Images Plus

Was denkt sich jetzt der Mathematiklehrer? Er denkt sich: „Wenn jetzt zwei Schüler wieder hineingehen, dann ist der Raum leer.“

Susanne möchte diesen Witz jeder Schülerin und jedem Schüler ihrer Klasse einzeln erzählen. Die Mitschüler laufen in der Mittelpause kreuz und quer über das Schulgelände. Zufällig trifft sie mal den einen und mal die andere – aber einigen hat sie den Witz schon erzählt.

Durch eine Simulation soll untersucht werden, wie sich die Kenntnis des Witzes in der Klasse ausbreitet und wie lange es dauert, bis alle den Witz kennen.

7.1 Entwickle für diese Simulation ein Modell. Überlege dazu folgende Fragen:

- Welche Annahmen sind für die Modellbildung notwendig? Denke dabei z. B. an die Größe der Klasse und wie lange es dauert, den Witz zu erzählen.
- Zufällig ist, ob Susanne eine Mitschülerin trifft, die diesen Witz schon kennt oder noch nicht. Das Gleiche gilt natürlich auch für ihre Mitschüler. Das Schwierige ist aber, dass die Anzahl sich jedes Mal ändert, wenn sie den Witz noch einmal erzählt hat.

Wie kann man mithilfe von Zufallszahlen entscheiden, ob Susanne beim nächsten Mal einen Mitschüler trifft, der den Witz noch nicht kennt?

### Tipp

Von den 25 Mitschülern kennen 17 den Witz schon. Die Zufallszahl ist 22. Der Mitschüler kennt den Witz noch nicht.

**Kompetenzprofil**

- Niveau: einführend, grundlegend
- Fachlicher Bezug: Stochastik
- Kommunikation: Vermutungen äußern, argumentieren, begründen, mathematische Texte erfassen
- Problemlösen: reproduzieren, Probleme formulieren, Lösungsstrategie entwickeln
- Modellierung: Modell entwickeln
- Medien: –
- Methode: Einzelarbeit, Gruppenarbeit
- Inhalt in Stichworten: Elchstest; Zufallszahlen; Problem des Zusammentreffens zweier Menschen, Ziegenproblem; Rosinenbrötchenproblem; Witz macht die Runde; Parkplatzproblem; Schnupfenproblem; Allgemein: Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

**Autor:** Dr. Hans-Peter Pommeranz, Halle



Zusätzliche Mediendateien finden Sie auf [www.archiv.raabe.de/mathe-stochastik](http://www.archiv.raabe.de/mathe-stochastik) im digitalen Ordner zu diesem Beitrag.

**Lösung**

1 Kontext 1 ermöglicht den Begründungszusammenhang zwischen den einzelnen Bausteinen dieser Kontextreihe. Die Sinnstiftung wird für die Schüler noch verstärkt, wenn ihre vielfältigen Erfahrungen bei der Diskussion der Ergebnisse der Aufgaben 1.1 und 1.2 einbezogen werden.

1.1

Gründe für Simulationen	Beispiele
Realexperimente sind zu teuer.	Erprobung der Erdbebensicherheit von Hochhäusern
Realexperimente sind zu gefährlich.	Erprobung der Sicherheitsbauten bei Kernkraftwerken
Realexperimente dauern zu lange.	Auswirkungen von Maßnahmen auf den Waldbestand
Für Realexperimente gibt es zu viele Möglichkeiten.	Konstruktion von Fahrzeugen

Im Normalfall wirken immer mehrere Gründe gleichzeitig. Weitere Gründe für Simulationen können ethischer Natur sein, oder die mathematische Beschreibung lässt eine exakte Lösung nicht zu (z. B. Vorhersage chaotischer Prozesse, z. B. das Wetter).

## Didaktisch-methodische Hinweise

Zufällige Ereignisse und Entwicklungen begegnen den Schülern tagtäglich. Es ist für sie bedeutsam zu erfahren, dass es Methoden und Verfahren gibt, auch für solche Ereignisse und Entwicklungen einigermaßen zuverlässige Prognosen treffen zu können. Eines der bekanntesten Beispiele ist der **Wetterbericht**, der für einen kurzen Zeitraum (in der Regel drei Tage) sehr zuverlässige Aussagen bezüglich der Entwicklung der Temperatur, des Niederschlages oder der Windstärke macht. Aber auch andere Prognosen sind für die Gestaltung der Gesellschaft von Bedeutung: die Entwicklung des Wirtschaftswachstums, der Beschäftigungsrate, der Lebenserwartung u. a. Dass diese Prognosen nicht immer so eintreffen, liegt unter anderem an dem jeweils zugrunde liegenden Modell.

Das Wesen der Modellbildung und die Arbeit mit dem Modell den Lernenden bewusst zu machen, ist Anliegen dieses Beitrags. Dazu wurden ausschließlich außermathematische Problemstellungen gewählt, um die vielfältige praktische Anwendbarkeit der Überlegungen zu verdeutlichen. Außerdem wurde gänzlich auf den Einsatz des Computers verzichtet, um die Modellierung, die Simulation in den Mittelpunkt der Betrachtungen zu rücken und diese nicht durch mögliche Schwierigkeiten mit der Anwendung bestimmter Programme zu überdecken. Wenn Sie dieses Thema weiter vertiefen möchten, so finden Sie im Internet zum Stichwort „stochastische Simulationen“ vielfältige Anregungen.

Mit diesem Beitrag wird hinsichtlich der KMK-Bildungsstandards eine Verschränkung der

- allgemeinen mathematischen Kompetenz „mathematisches Modellieren“ mit der
- mathematischen Leitidee „Daten und Zufall“

ermöglicht.