

UNTERRICHTS MATERIALIEN

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Sek I/II



AXEL – ALEX

Spielautomaten und Wahrscheinlichkeit

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Sekundarstufe I

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß § 60a UrhG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk ein einfaches, nicht übertragbares Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung in Klassenanzahlstärke zu vervielfältigen. Jede darüber hinausgehende Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmitteln (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. GEMA-meldepflichtig.

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und ggf. angefragt.

Dr. Josef Raabe Verlag GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-1
meinRaabe@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth

Satz: Rösel MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe

Bildrechte: Titel: filo/Getty Images Plus/DigitalVision Vectors

Lektorat: Dipl.-Math. Dr. rer. Nat. Yvonne Raden

AXEL – ALEX

1. Jugendbetreuer Axel Alex ist so in die vier Buchstaben seines Namens verliebt, dass er für den Gruppenraum einen Spielautomaten des folgenden Aufbaus bestellt: Vier sich unabhängig voneinander drehende Walzen, die auf jeweils vier gleich großen Feldern die Buchstaben A, E, L und X tragen, werden durch einen Startknopf in Bewegung gesetzt. In der Ruhestellung der Walzen wird in jedem der vier nebeneinanderliegenden Fenster ein Buchstabe erscheinen, sodass das Ergebnis ein Wort aus vier Buchstaben ist.
 - 1.1 Der Spielautomat wird zu einem Spiel gestartet. Bestimme die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
 E_1 : „Der dritte Buchstabe ist ein A.“
 E_2 : „Der Buchstabe X tritt genau dreimal auf.“
 E_3 : „Alle vier Buchstaben sind gleich.“
 E_4 : „Alle vier Buchstaben sind verschieden.“
 E_5 : „Es erscheint das Wort AXEL oder das Wort ALEX.“
 - 1.2 Erscheinen vier unterschiedliche Buchstaben, so erhält man einen Trostpreis, erscheint AXEL oder ALEX einen Hauptpreis.
 - 1.2.1 Wie oft muss man den Automaten mindestens betätigen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % wenigstens einen
 - 1.2.1.1 Trostpreis,
 - 1.2.1.2 Hauptpreis zu erhalten?
 - 1.2.2 Der Automat wird 50-mal betätigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man mehr als zwei Trostpreise?
 - 1.2.3 Der Automat wird 100-mal betätigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man mehr als einen Hauptpreis?
 - 1.3 In einer Urne liegen 16 gleichartige Kugeln, von denen jeweils vier Kugeln einen der Buchstaben A, E, L oder X tragen. Ein Jugendlicher zieht vier Kugeln mit einem Griff. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tragen die vier Kugeln unterschiedliche Buchstaben? Warum unterscheidet sich dieses Ergebnis von der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_4 (Variiere zur Begründung die Anzahl der Kugeln)?

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend
- Fachlicher Bezug: Stochastik
- Kommunikation: begründen
- Problemlösen: Lösungen angeben
- Modellierung: –
- Medien: –
- Methode: Einzelarbeit, Hausaufgabe
- Inhalt in Stichworten: diverse Ereigniswahrscheinlichkeiten; Bernoulli-Kette und Binomialverteilung; Vergleich Ziehen mit und ohne Zurücklegen; einseitiger Signifikanztest

Autor: Alfred Müller

Lösung

1.1 E_1 : Jeder der 4 Buchstaben tritt auf jeder Walze mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{4}$ auf. Daraus folgt für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses:

$$P(E_1) = \frac{1}{4}$$

E_2 : Da die drei Treffer X auf vier Plätze verteilt werden können und „kein X“ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ auftritt gilt:

$$P(E_2) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \approx 4,67\%$$

E_3 : Als gleiche Buchstaben können die vier Buchstaben A, E, L, X auftreten, d.h. es gilt:

$$P(E_3) = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{64} \approx 1,56\%$$

E_4 : Vier unterschiedliche Buchstaben können auf 4! Arten angeordnet werden, d.h. für dieses Ereignis gilt:

$$P(E_4) = 4! \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{6}{64} = \frac{3}{32} = 0,09375 \approx 9,38\%$$

E_5 : AXEL bzw. ALEX sind jeweils eine der 4! Möglichkeiten aus E_4 , d.h. es gilt:

$$P(E_5) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{128} = 0,0078 \approx 0,78\%$$

1.2.1 Die Zufallsgröße Z gebe die Anzahl der Trostpreise bzw. der Hauptpreise an. Es liegt eine Binomialverteilung mit unbekanntem n und $p = \frac{3}{32}$ bzw.

$p = \frac{1}{128}$. Es soll gelten:

1.2.1.1 $B_{\frac{3}{32}}^n(Z \geq 1) = 1 - B_{\frac{3}{32}}^n(Z = 0) > 0,95$, das heißt:

$B_{\frac{3}{32}}^n(Z = 0) < 0,05$, also:

$\left(\frac{29}{32}\right)^n < 0,05$ und damit:

$n \cdot \ln \frac{29}{32} < \ln 0,05 \mid : \ln \frac{29}{32} < 0(!)$, was letztlich ergibt:

$n > \frac{\ln 0,05}{\ln \frac{29}{32}} \approx 30,43 \Rightarrow n \geq 31$

Man muss den Automaten mindestens 31mal betätigen.

1.2.1.2 Mit den Überlegungen zu 1.2.1.1 gilt:

$B_{\frac{1}{128}}^n(Z = 0) < 0,05$, also:

$\left(\frac{127}{128}\right)^n < 0,05$ und daher wie zuvor:

$n \cdot \ln \frac{127}{128} < 0,05 \mid : \ln \frac{127}{128} < 0$, somit:

$n > \frac{\ln 0,05}{\ln \frac{127}{128}} \approx 381,95 \Rightarrow n \geq 382$

Der Automat muss mindestens 382mal betätigt werden.

1.2.2 Für die Anzahl Z der Trostpreise liegt eine Binomialverteilung vor mit

$n = 50$ und $p = \frac{3}{32}$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit

$B_{\frac{3}{32}}^{50}(Z > 2) = 1 - B_{\frac{3}{32}}^{50}(Z \leq 2)$

$$= 1 - \binom{50}{0} \cdot \left(\frac{3}{32}\right)^0 \cdot \left(\frac{29}{32}\right)^{50} - \binom{50}{1} \cdot \frac{3}{32} \cdot \left(\frac{29}{32}\right)^{49} - \binom{50}{2} \cdot \left(\frac{3}{32}\right)^2 \cdot \left(\frac{29}{32}\right)^{48}$$

$$\approx 1 - 0,00728 - 0,03768 - 0,09550 = 0,85954 \approx 85,95 \%$$

Dieses Werk ist Bestandteil der Reihe RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß §60b UrhWissG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung herunterzuladen, zu speichern und in Klassensatzstärke auszudrucken. Jede darüber hinausgehende Nutzung sowie die Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlags. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. GEMA-meldepflichtig. Darüber hinaus sind Sie nicht berechtigt, Copyrightvermerke, Markenzeichen und/oder Eigentumsangaben des Werks zu verändern.

Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:



Schnelle und intuitive Produktsuche



Übersichtliches Kundenkonto



Komfortable Nutzung über
Computer, Tablet und Smartphone



Höhere Sicherheit durch
SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de