UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II

Eine Reise nach Karthago

Umgang mit Extremwerten

Mal langsam und mal schnell

Ableitungen in der Physik

Kosten und Gewinne

Aufgaben aus der Wirtschaft

Radfahren kinderleicht! – Krümmung und Wendepunkte

Das Krümmungsverhalten mithilfe der 2. Ableitung verstehen

Exponential- und Logarithmusfunktionen

Eigenschaften dieser Funktionsfamilie

Polynom- und gebrochen-rationale Funktionen

Eine Checkliste

Und 12 weitere Beiträge

RAABE
KLASSE SCHULE

Eine Reise nach Karthago – Lösungsstrategien zum Umgang mit Extremwertproblemen

Hintergrund/Motivation

Extrem schwer – aber nicht mit Tipps!

Bereits in der SEK. I treffen Ihre Schüler auf Extremwertprobleme, die sie durch die Problemstrategie des Probierens zu lösen versuchen. Erst in der SEK. II wird ein **Verfahren zur systematischen Bearbeitung und Lösung von Extremwertaufgaben** vermittelt.

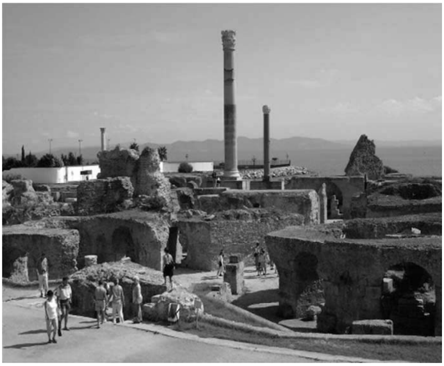
„Durch welche Abmessungen bekommt ein Landstück um Karthago einen maximalen Flächeninhalt?“ ist nur eines von zahlreichen Anwendungsbeispielen.

Karthago: thinkstock/iStock

Motivieren Sie Ihre Schüler durch Praxisaufgaben, die sie mithilfe von Tippkarten selber lösen können. Lassen Sie sie so das Lösen von Extremwertproblemen durchdringen und dann einüben.

1. Die Gründung Karthagos – mit einer Kuhhaut ein möglichst großes Stück Land umspannen

Das historische Karthago war eine Großstadt in Nordafrika, nahe der heutigen Hauptstadt Tunesiens (Tunis). Der Gründungslegende zufolge wurde Karthago von der phönizischen Prinzessin Elissa, welche unter den Römern „Dido" genannt wurde, erschlossen. Nach der Flucht vor ihrem tyrannischen Bruder landete sie an der afrikanischen Küste. Der ortsansässige Häuptling versprach ihr so viel Land, wie sie mit einer Kuhhaut umspannen können.



Quelle: WIKIMEDIA COMMONS/BishkekRocks

Karthago: Ruinen der Antoninus-Pius-Thermen

Wie hätte Prinzessin Dido vorgehen können?

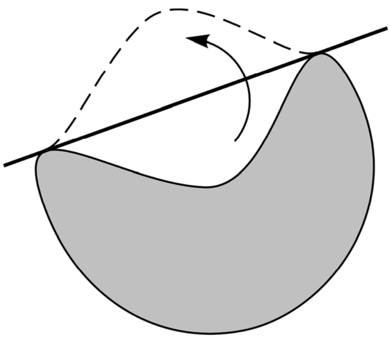
Welche ebene Figur hat bei gegebenem Umfang den größtmöglichen Flächeninhalt?

Tipp Verwenden Sie die isoperimetrische Ungleichung.

$4\pi \cdot A \leq U^2$

Das Gleichheitszeichen gilt <u>nur</u> für den Kreis

($U = 2\pi\, r$; $A = \pi\, r^2$).



3. Step by Step – ein Hilfsraster zum Lösen von Extremwertproblemen

3.1 Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind 12 cm und 8 cm lang. Diesem Dreieck ist ein möglichst großes Rechteck einzubeschreiben, von dem zwei Seiten auf den Katheten des Dreiecks liegen.
Erarbeiten Sie eine Lösung mithilfe des folgenden Lösungsrasters.

Tipp Erstellen Sie die Lösungsskizzen groß in Ihrem Heft.

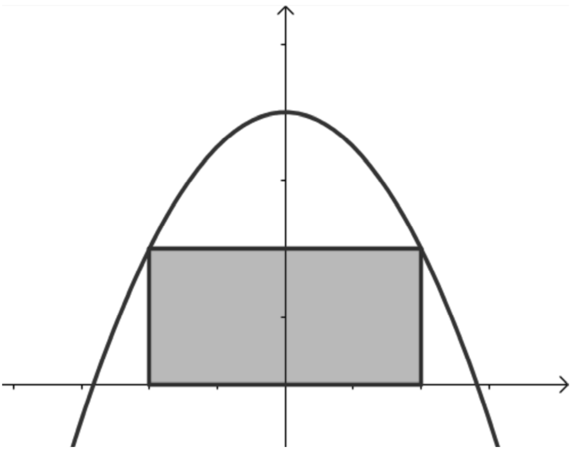
Methodischer Schritt	**Lösungsskizze**	**Tipp**
1. Vorbereitung Wählen Sie geeignete Variablen und fertigen Sie eine Skizze zum Sachverhalt an.		Geeignete Variablen wären z. B. x und y.
2. Hauptbedingung Bestimmen Sie eine Hauptbedingung.		Ziel ist zunächst, den Flächeninhalt eines Rechtecks zu berechnen. Formel: $A = x \cdot y$
3. Nebenbedingung Stellen Sie eine auf den Kontext bezogene Nebenbedingung auf.		Was muss das Rechteck erfüllen? Es wird begrenzt durch das Dreieck mit den Seitenmaßen 8 cm und 12 cm. Stellen Sie jeweils ein Verhältnis zwischen den Katheten und den Seiten des Rechtecks her.

4. Machen Sie sich fit im Umgang mit Extremwertaufgaben!

4.1 Um den sicheren Umgang mit Extremwertproblemen zu üben, können Sie bei folgenden Aufgaben zwischen vier unterschiedlichen Schwierigkeitsstufen wählen.

Aufgabenkarte 1 – leicht

Das rechts abgebildete Rechteck soll einen maximalen Flächeninhalt bekommen. Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt dieses Rechtecks, wenn die begrenzende Parabel gegeben ist durch $f(x) = -0{,}5x^2 + 4$.

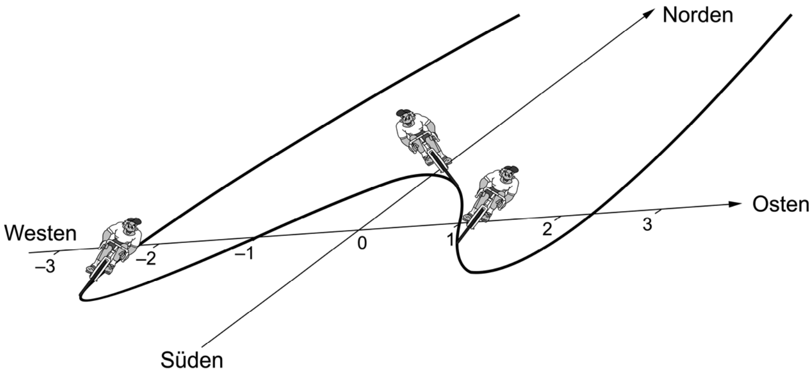


Aufgabenkarte 2 – mittelschwer

Die Zahl 30 soll so in zwei Summanden x und y zerlegt werden, dass das Produkt aus dem ersten Summanden und dem Quadrat des zweiten Summanden maximal wird.

Radfahren kinderleicht! – Krümmung und Wendepunkte

Auf die Perspektive kommt es an!



Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{12} \cdot \left(x^4 - 6x^2 + 5\right)$

Betrachtet man den Graphen der gleichen Funktion wie in M 7 „von oben“, also etwa als „Radweg“ in einer Landkarte (rechts), dann kommt der Radler in einer Linkskurve von „Westen“ angefahren, muss sich im Wendepunkt $(-1|0)$ nach rechts legen, um in der folgenden Rechtskurve nicht zu stürzen, bis er beim anderen Wendepunkt $(1|0)$ wieder sein Gewicht auf die linke Seite verlagert, um die lang gezogene Linkskurve zu meistern. Hier sind die beiden südlichsten Routenpunkte die Tiefpunkte $\left(\pm\sqrt{3}\,|\,-\frac{1}{3}\right)$, der dazwischen (!) nördlichste ist der Hochpunkt $\left(0\,|\,\frac{5}{12}\right)$. Er stellt ein lokales Maximum dar, da links und rechts der Minima auch größere Werte erreicht werden („weiter im Norden“).

Krümmungsverhalten eines Graphen G_f :

Ist in einem Bereich $f''(x) > 0$ (pos**i**tiv), dann verläuft der Graph dort l**i**nks gekrümmt, also als L**i**nkskurve.

Ist in einem Bereich $f''(x) < 0$ (n**e**gativ), dann verläuft der Graph dort als R**e**chtskurve.

Ist an einer Stelle $f''(x) = 0$, dann liegt ein Punkt vor, an dem sich die Krümmungsrichtung möglicherweise ändert (sog. **Wendepunkt**).

Oft beschreibt man das Krümmungsverhalten mit einer Krümmungstabelle, in der die Bereiche zwischen den Nullstellen der zweiten Ableitung festgehalten werden.

Beachten Sie: Minima werden stets in einer Linkskurve durchlaufen, Maxima dagegen immer in einer Rechtskurve!

Bsp. von oben: $f(x) = \frac{1}{12} \cdot \left(x^4 - 6x^2 + 5\right)$ mit $f''(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x$
Vorzeichen von f’’(x)	+	–	+
Krümmung des Graphen von f	links	rechts	links

1. Untersuchen Sie mithilfe einer Krümmungstabelle auf Wendepunkte.

   a) $g_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x$

   b) $g_2(x) = x^5 - x^3 - 2x$

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend
- Fachlicher Bezug: Funktionen, Differenzialrechnung
- Kommunikation: –
- Problemlösen: mit symbolischen, technischen und formalen Elementen der Mathematik umgehen, Regeln anwenden
- Modellierung: –
- Medien: –
- Methode: Einzelarbeit
- Inhalt in Stichworten: Krümmungsverhalten, Wendepunkte

Autor: Florian Borges

Lösung

1. a)

$$g_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x$$
$$\Rightarrow \quad g_1'(x) = x^2 - 2x - 2$$
$$\Rightarrow \quad g_1''(x) = 2x - 2 = 0;$$
$$\Rightarrow \quad x = 1$$

	$x < 1$	$x > 1$
Vorzeichen von $g_1''(x)$	–	+
Graph von $g_1(x)$	rechts gekrümmt	links gekrümmt

WP bei $\left(1 \middle| -2\frac{2}{3}\right)$

b)

$$g_2(x) = x^5 - x^3 - 2x$$
$$\Rightarrow g'_2(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2$$
$$\Rightarrow g''_2(x) = 20x^3 - 6x = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0;\ x_{2,3} = \pm\sqrt{0{,}3}$$