

Reihe 21 S 1	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
-----------------	---------	----------	-----	---------	----------

Eine Reise nach Karthago – Lösungsstrategien zum Umgang mit Extremwertproblemen

Michael Piechatzek, Dortmund

II/A



Quelle: WIKIMEDIA COMMONS/B'shkekRocks

Karthago: Ruinen der Antoninus-Pius-Thermen

Klasse: 11/12

Dauer: 6 Stunden

Inhalt: Extremwertproblem lösen, Haupt- und Nebenbedingung und Zielfunktion aufstellen, elementare Differenzialrechnung, Übungsaufgaben mit Praxisbezug

Ihr Plus: Tippkarten für ein eigenverantwortliches Erarbeiten von Extremwertproblemen sowie Hilfsraster zum strategischen Lösen von Extremwertaufgaben

Extrem schwer – aber nicht mit Tipps!

Bereits in der SEK. I treffen Ihre Schüler auf Extremwertprobleme, die sie durch die Problemstrategie des Probierens zu lösen versuchen. Erst in der SEK. II wird ein **Verfahren zur systematischen Bearbeitung und Lösung von Extremwertaufgaben** vermittelt. „Durch welche Abmessungen bekommt ein Landstück um Karthago einen maximalen Flächeninhalt?“ ist nur eines von zahlreichen Anwendungsbeispielen. Motivieren Sie Ihre Schüler durch Praxisaufgaben, die sie mithilfe von Tippkarten selber lösen können. Lassen Sie sie so das Lösen von Extremwertproblemen durchdringen und dann einüben.

Didaktisch-methodische Hinweise

Das **Optimieren** (= Extremwertesuchen) ist eine der Grundtätigkeiten des Mathematikers. Dabei geht es immer darum, das Maximum bzw. Minimum einer Funktion zu finden, die in der Regel erst entsprechend der Aufgabenstellung aufgestellt werden muss. Das Optimieren spielt in vielen Anwendungsbereichen eine Rolle, vor allem in der **Wirtschaft**. Zum Teil kann man diese Anwendungen schon in der gymnasialen Oberstufe begreifen. Schön ist, dass es sich nicht um abstrakte Überlegungen handelt, die im Elfenbeinturm angestellt worden sind, sondern dass alle Aufgaben dieses Gebiets **Praxisbezug** haben. Gern werden Optimierungsaufgaben deshalb auch in der **schriftlichen Abiturprüfung** gestellt. Neben der Differenzialrechnung gibt es alternative Möglichkeiten, Optimierungsaufgaben zu lösen. Damit zeichnen sich diese Aufgaben durch eine große Vielfalt an Lösungsmöglichkeiten aus.

Heuristiken, sog. **Problemlösestrategien**, spielen in der SEK. II eine besondere Rolle, wenn es um die Bearbeitung von Extremwertproblemen geht. Der Beitrag vermittelt ein Verfahren, wie man solche Probleme angehen kann. Eigenverantwortliches Arbeiten an vielfältigen Problemstellungen steht dabei im Vordergrund. So zu lernen ist die effektivste Methode, um neue Strukturen besser zu erfassen und zu memorieren.

Extremwertprobleme bergen eine für Schüler große Schwierigkeit: die Übersetzung von Aufgabenkontexten in die Mathematik. Dabei stellt sich stets die Frage, wie an eine Aufgabe herangegangen werden kann. Tippkarten helfen, indem sie erste Hürden von Schülern beseitigen und einen Weg zur Lösung des Problems aufzeigen. Das Einüben des Lösens nach einem vorgeschriebenen Raster gibt dem Schüler Sicherheit.

Mit Optimierungsaufgaben fördern Sie nicht nur das Textverständnis, sondern insbesondere Kompetenz im **mathematischen Modellieren**. Optimierungsfähigkeiten lassen sich als **fächerverbindende Projekte** unterrichten. Vielleicht haben Sie als Zweitfach Wirtschaft oder auch Physik. Dann ist es für Sie einfach, wirtschaftliche Zusammenhänge oder auch physikalische Sachverhalte in Ihren Unterricht einzubauen. Wenn nicht, tauschen Sie sich mit Ihren Kollegen aus. In jedem Fall können Sie an realen Beispielen zeigen, wozu mathematische Berechnungen dienen. Sie vermitteln Ihren Schülern Fertigkeiten, die für sie im späteren Berufsleben von Bedeutung sein können. Bei Optimierungsaufgaben bietet es sich an, mit **dynamischer Geometriesoftware (GeoGebra)** den funktionalen Zusammenhang zu veranschaulichen. Gehen Sie dazu mit Ihren Schülern in den Computerraum, sodass immer zwei Schüler gemeinsam einen Computerarbeitsplatz nutzen.

Lehrplanbezug: Differenzial- und Integralrechnung zur Vorbereitung des Abiturs

Die Differenzial- und Integralrechnung bildet das zentrale Thema der Klassenstufen 11 und 12. Bereits in Klasse 11 enthält z. B. der Lehrplan Bayern¹ die Berechnung lokaler Extremwerte (13 Stunden).

Voraussetzungen für den Einsatz der Materialien

Ihre Schüler kennen die Lösungsverfahren der **elementaren Differenzialrechnung**. Vor allem müssen Ihre Schüler fit sein im **Bilden der ersten und zweiten Ableitung**. Sie kennen die **notwendige und hinreichende Bedingung für Extrempunkte** einer Funktion.

Minimalplan

Wenn wenig Zeit zur Verfügung steht, so lassen Sie das Einführungsbeispiel **M 1** weg und starten mit Material **M 2**. Als Hausaufgabe lösen Ihre Schüler die Aufgabe 2 von **M 3**, wobei sie sich vorher das Step-by-Step-Lösungsraster klarmachen. Auch die Übungsaufgaben lösen Ihre Schüler als Hausaufgabe. Die Lösungen lassen Sie im Plenum vortragen. Die Lernerfolgskontrolle entfällt in diesem Fall.

¹ <http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26192>

Reihe 21 S 3	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Die zentrale Leitidee in der SEK. II ist der funktionale Zusammenhang. Ihre Schüler wenden elementare Kenntnisse aus der SEK. I und der Einführungsphase beim Lösen von Extremwertproblemen an und vertiefen diese an kontextbezogenen Übungen.

II/A

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler ...	Anforderungsbereich
K 1, K 6	L 1, L 4	... lernen den Begriff des Extremwertproblems kennen (M 1, M 2),	I
K 1, K 2, K 6	L 1, L 4	... lernen Strategien für den Umgang mit Extremwertproblemen kennen (M 2, M 3),	I, II
K 5	L 1, L 4	... stellen die Haupt- und Nebenbedingung und die Zielfunktion von Extremwertproblemen auf und lösen das Problem (M 2– M 4),	II, III
K 3	L 1, L 4	... lernen den Begriff des Extremwertproblems in alltäglichen Situationen kennen (M 3–M 6).	I–III

Für welche Kompetenzen und Anforderungsbereiche die Abkürzungen stehen, finden Sie auf beiliegender CD-ROM 65.

Auf einen Blick

Material	Thema	Stunde
M 1	Die Gründung Karthagos – mit einer Kuhhaut ein möglichst großes Stück Land umspannen Motivation und Idee des Extremwertbegriffs	1.
M 2	Anleitung für ein Rechteck – den Flächeninhalt maximieren Eine erste Extremwertaufgabe und Tippkarten für eine zielgeleitete Lösung des Problems	2./3.
M 3	Step by Step – ein Hilfsraster zum Lösen von Extremwertproblemen Das strukturierte Erarbeiten der Lösung eines Extremwertproblems	4.
M 4	Machen Sie sich fit im Umgang mit Extremwertaufgaben! Übungsaufgaben	5.
M 5	Mit Tipps zum Erfolg – Tippkarten Tipps zum sicheren Umgang mit Extremwertaufgaben	
M 6 (LEK)	Testen Sie Ihr Wissen! Den Lernerfolg feststellen	6.

M 1 Die Gründung Karthagos – mit einer Kuhhaut ein möglichst großes Stück Land umspannen

Das historische Karthago war eine Großstadt in Nordafrika, nahe der heutigen Hauptstadt Tunesiens (Tunis). Der Gründungslegende zufolge wurde Karthago von der phönizischen Prinzessin Elissa, welche unter den Römern „Dido“ genannt wurde, erschlossen. Nach der Flucht vor ihrem tyrannischen Bruder landete sie an der afrikanischen Küste. Der ortsansässige Häuptling versprach ihr so viel Land, wie sie mit einer Kuhhaut umspannen könne.

Wie hätte Prinzessin Dido vorgehen können? Welche ebene Figur hat bei gegebenem Umfang den größtmöglichen Flächeninhalt?

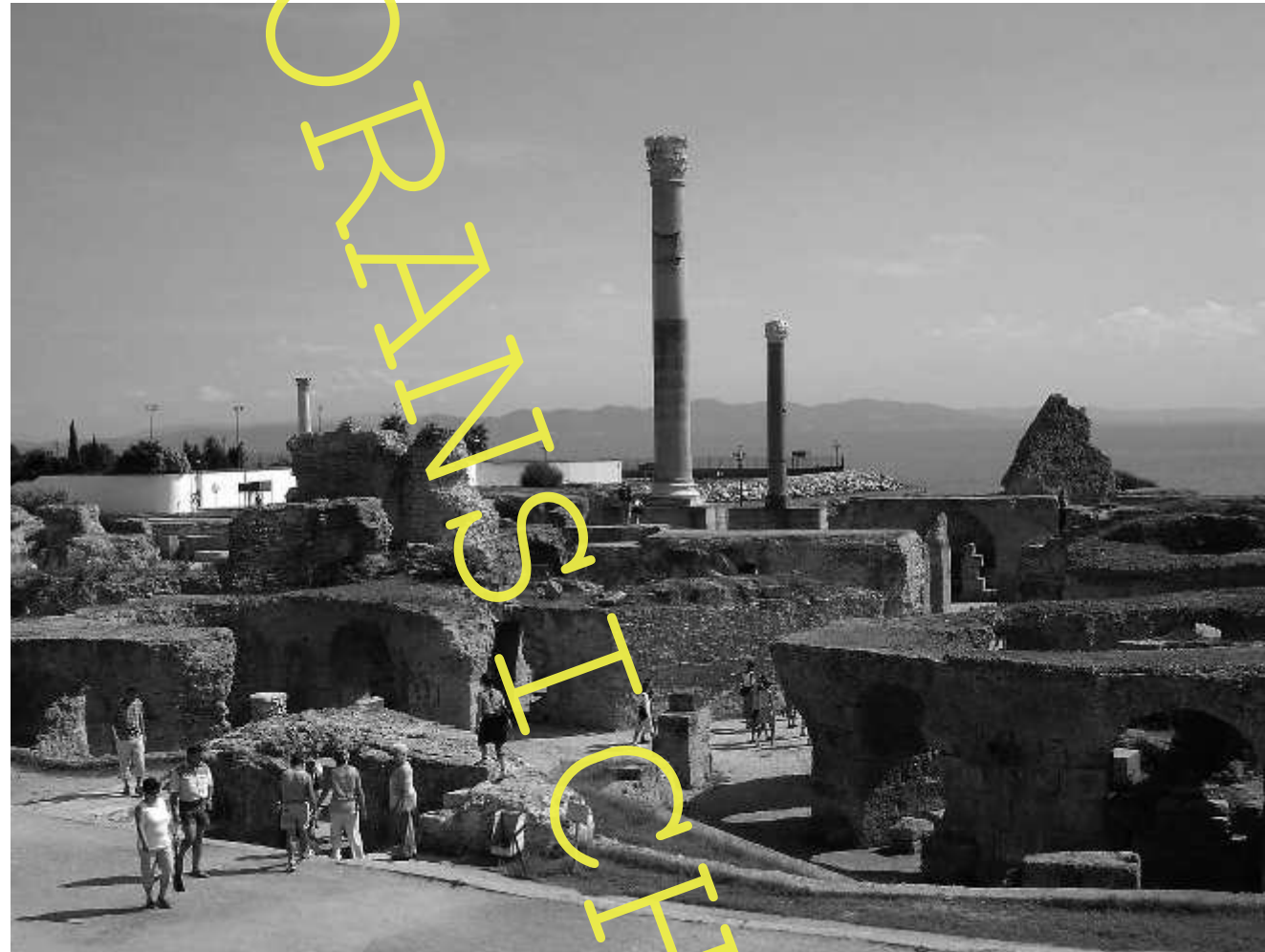
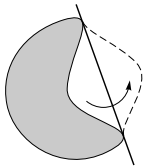
Tipp

Verwenden Sie die isoperimetrische Ungleichung.

$$4\pi \cdot A \leq U^2$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für den Kreis

$$(U = 2\pi r; A = \pi r^2).$$



Karthago: Ruinen der Antoninus-Pius-Thermen

Quelle: WIKIMEDIA COMMONS/BishkekRocks

Reihe 21	Verlauf	Material S 2	LEK	Glossar	Lösungen
-----------------	----------------	------------------------	------------	----------------	-----------------

M 2 Anleitung für ein Rechteck – den Flächeninhalt maximieren

Aufgabe 1

Hannes Hartmann hat ein Problem: Für einen Bilderrahmen soll er die Seitenlängen eines Rechtecks berechnen, welches einen Umfang von exakt einem Meter hat und einen maximalen Flächeninhalt haben soll. Hannes faltet, rechnet und denkt, kommt allerdings zu keinem sinnvollen Ergebnis. Können Sie ihm weiterhelfen?



II/A

Merkkasten zu Extremwertproblemen

Definition: Oft wird in mathematischen Berechnungen der „größte“ oder „kleinste“ Wert gesucht, den eine Funktion annehmen kann. Kann man aus mehreren Bedingungen eine sogenannte **Zielfunktion** bestimmen, von welcher ein **Maximum** bzw. **Minimum** berechenbar ist, so spricht man von einem **Extremwertproblem mit Nebenbedingung**.

Folgende Tipps helfen Ihnen beim Umgang mit dieser Aufgabe:

✂	<p>1. Tipp</p> <p>Was ist Ziel der Aufgabe? Bilden Sie eine Hauptbedingung.</p>	<p>1. Lösung</p> <p>Ziel ist es, den Flächeninhalt eines Rechtecks bei gegebenem Umfang <u>maximal</u> werden zu lassen.</p> <p>Eine dazu passende Hauptbedingung stellt die folgende Gleichung dar: $A = a \cdot b$</p>
✂	<p>2. Tipp</p> <p>Welche mathematischen Informationen lassen sich der Aufgabe noch entnehmen? Bilden Sie eine Nebenbedingung.</p>	<p>2. Lösung</p> <p>Der Umfang des Rechtecks soll 1 Meter betragen. Eine passende Nebenbedingung ist die Gleichung: $1 = 2a + 2b$</p>
✂	<p>3. Tipp</p> <p>Wie können die beiden Gleichungen miteinander verknüpft werden? Hinweis: Denken Sie an das Lösen von linearen Gleichungssystemen.</p>	<p>3. Lösung</p> <p>Formt man die Nebenbedingung um und setzt diese in die Zielfunktion ein, so erhält man eine Verknüpfung beider Gleichungen.</p>
✂	<p>4. Tipp</p> <p>Wie sieht demnach die Zielfunktion aus?</p>	<p>4. Lösung</p> <p>$1 = 2a + 2b \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} - b$</p> <p>Einsetzen in die Hauptbedingung liefert: $A(b) = \left(\frac{1}{2} - b\right) \cdot b = \frac{1}{2}b - b^2$</p>

II/A

M 2 Anleitung für ein Rechteck – den Flächeninhalt maximieren

✂	<p>5. Tipp</p> <p>Gesucht ist der maximale Flächeninhalt! Die Zielfunktion ist eine quadratische Funktion. Berechnen Sie ihr Maximum.</p>	<p>5. Lösung</p> <p>Ableitungen bilden: $A'(b) = -2b + \frac{1}{2}$ $A''(b) = -2$</p> <p>Notwendige Bedingung: $A'(b) = 0$ $-2b + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{4}$</p> <p>Hinreichende Bedingung: $A'(b) = 0 \wedge A''(b) \neq 0$ $A''\left(\frac{1}{4}\right) = -2 < 0$</p> <p>Demnach liegt an der Stelle $b = \frac{1}{4}$ das Maximum.</p>
✂	<p>6. Tipp</p> <p>Nun kann die Extremstelle in die Nebenbedingung eingesetzt werden, um a zu berechnen.</p>	<p>6. Lösung</p> $1 = 2a + 2 \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$
✂	<p>7. Tipp</p> <p>Die Ergebnisse müssen interpretiert und die Lösungen notiert werden.</p>	<p>7. Lösung</p> <p>Es handelt sich bei dem Rechteck um ein Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{1}{4}$, da $a = b = \frac{1}{4}$ gilt.</p>
✂		

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Seitenlänge eines Rechtecks mit maximalem Flächeninhalt, welches einen Umfang von exakt 1,5 Metern hat.

Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabe 1.

Beschreiben Sie, was Ihnen auffällt.

Aufgabe 3

Die Lösung der Aufgabe beinhaltet, dass das Rechteck in diesem Fall ein Quadrat ist.

Beweisen Sie, dass diese Tatsache für einen beliebigen Umfang U gilt.



Der gesuchte Bilderrahmen ist quadratisch.

© iStock/Thinkstock

Reihe 21	Verlauf	Material S 4	LEK	Glossar	Lösungen
-----------------	----------------	------------------------	------------	----------------	-----------------

M 3 Step by Step – ein Hilfsraster zum Lösen von Extremwertproblemen

II/A

Aufgabe 1

Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind 12 cm und 8 cm lang. Diesem Dreieck ist ein möglichst großes Rechteck einzubeschreiben, von dem zwei Seiten auf den Katheten des Dreiecks liegen. Erarbeiten Sie eine Lösung mithilfe des folgenden Lösungsrasters.



Tipp Erstellen Sie die Lösungsskizzen groß in Ihrem Heft.

Methodischer Schritt	Lösungsskizze	Tipp
1. Vorbereitung Wählen Sie geeignete Variablen und fertigen Sie eine Skizze zum Sachverhalt an.		Geeignete Variablen wären z. B. x und y .
2. Hauptbedingung Bestimmen Sie eine Hauptbedingung.		Ziel ist zunächst, den Flächeninhalt eines Rechtecks zu berechnen. Formel: $A = x \cdot y$
3. Nebenbedingung Stellen Sie eine auf den Kontext bezogene Nebenbedingung auf.		Was muss das Rechteck erfüllen? Es wird begrenzt durch das Dreieck mit den Seitenmaßen 8 cm und 12 cm. Stellen Sie jeweils ein Verhältnis zwischen den Katheten und den Seiten des Rechtecks her.
4. Zielfunktion Setzen Sie die Nebenbedingung in die Hauptbedingung ein, um so eine Zielfunktion zu bestimmen.		Achten Sie auf die Variablen. Lösen Sie die Nebenbedingung nach einer Variablen auf, und setzen Sie diese Variable in die Hauptbedingung ein.
5. Extremwertberechnung Bestimmen Sie die Extrema der Zielfunktion. Achten Sie ggf. auf den Definitionsbereich der Funktion.		Bestimmen Sie die notwendige und die hinreichende Bedingung für das Vorhandensein von Extremstellen.
6. Berechnung aller gesuchten Größen Berechnen Sie die zweite Variable durch Einsetzen.		Schauen Sie sich die zuvor aufgestellten Gleichungen an und wählen Sie die richtige aus. Bedenken Sie, dass Sie an dieser Stelle die Variable y berechnen wollen.
7. Angabe der Lösung Geben Sie die Lösung der Berechnung kommentiert an.		Beachten Sie den Bezug zum Aufgabenkontext. Worum genau geht es? Aufgabenziel ist der maximale Flächeninhalt.

VORANSICHT

Reihe 21	Verlauf	Material S 5	LEK	Glossar	Lösungen
-----------------	----------------	------------------------	------------	----------------	-----------------

III/A

M 3 Step by Step – ein Hilfsraster zum Lösen von Extremwertproblemen

Aufgabe 2 – eine zerbrochene Fensterscheibe

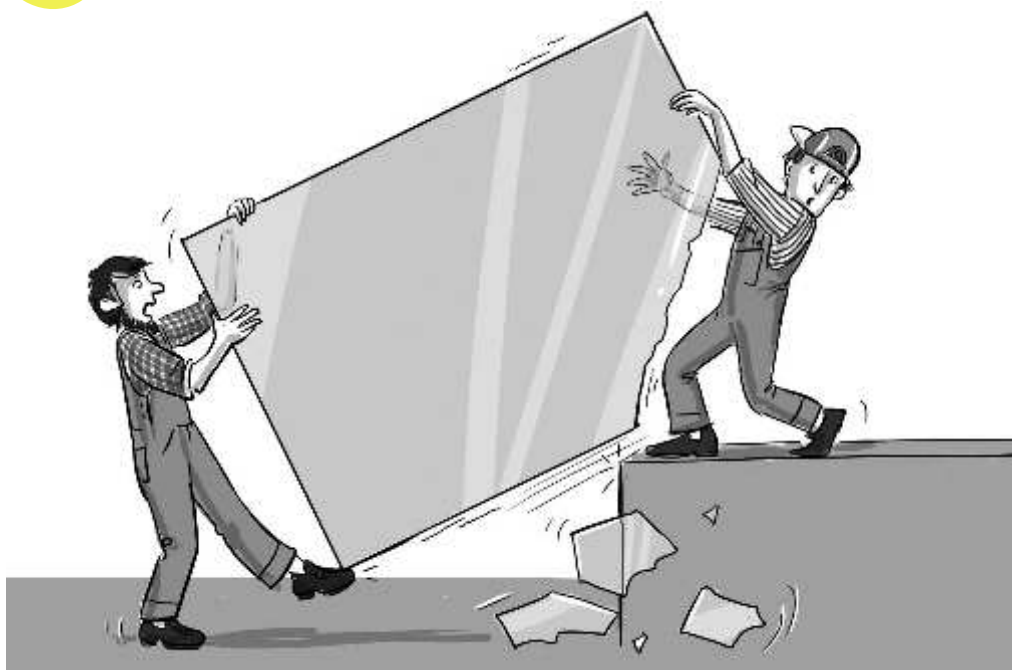
Der Glaser Mark von Glasberg wollte eine 2,5 m breite und 2 m hohe Glasscheibe ausliefern. Durch eine kleine Unachtsamkeit seines Kollegen Holger ist jedoch rechts oben ein dreieckiges Stück abgebrochen, welches die Seitenlängen von jeweils 1 m hat. Aus dem Rest soll nun eine rechteckige Scheibe mit maximaler Größe geschnitten werden.

Nutzen Sie für die folgenden Aufgaben das in Aufgabe 1 erarbeitete Lösungsraster.

Erstellen Sie dafür eine Tabelle der folgenden Gestalt:

Methodischer Schritt	Lösungsskizze
1. Vorbereitung Wählen Sie geeignete Variablen und fertigen Sie eine Skizze zum Sachverhalt an. ...	

- Bestimmen Sie eine Funktion $A(x)$ für die rechteckige Fläche der neuen Glasscheibe. Dokumentieren Sie Ihr Vorgehen ausführlich und erstellen Sie eine Skizze.
- Berechnen Sie nun, für welchen Wert x sich eine maximale Fläche ergibt. Ermitteln Sie auch die Größe dieser Fläche.
- Geben Sie für Ihre Flächeninhaltsfunktion $A(x)$ eine sinnvolle Definitionsmenge an.



Die Scheibe ist noch umzudrehen, damit sich die abgebrochene Ecke oben rechts befindet.

M 6

Testen Sie Ihr Wissen!

Aufgabe 1

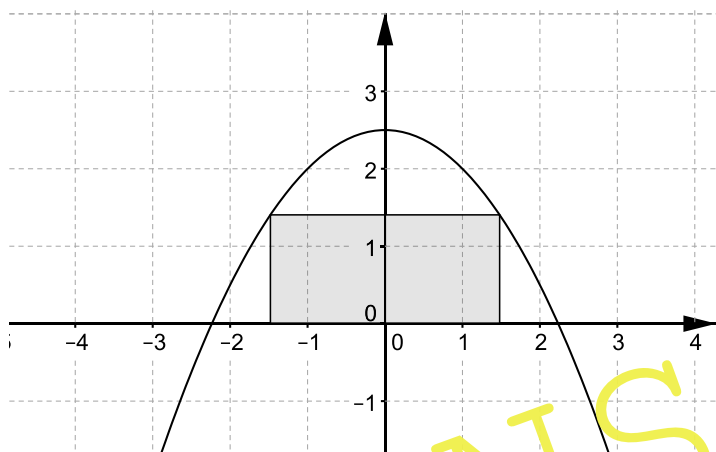
Gegeben sei eine Parabel durch die Funktionsvorschrift

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}.$$

Das abgebildete **Rechteck**, welches der Parabel einbeschrieben ist, soll maximalen Flächeninhalt haben. Bestimmen Sie die Seitenlängen a und b des Rechtecks sowie seinen maximalen Flächeninhalt.



II/A

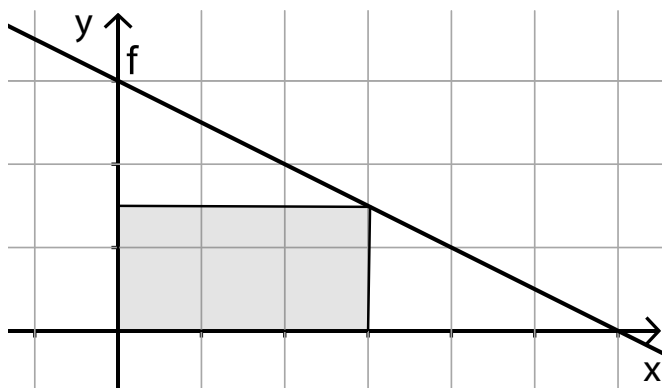


Aufgabe 2

Das unten abgebildete Rechteck wird begrenzt durch die lineare Funktion f mit

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3.$$

Es soll maximalen Flächeninhalt besitzen. Berechnen Sie die Seitenlängen des Rechtecks sowie seinen maximalen Flächeninhalt.



Aufgabe 3

Die Zahl 120 soll so in zwei Summanden a und b zerlegt werden, dass das Produkt aus dem ersten Summanden und dem Quadrat des zweiten Summanden maximal wird.

Lösungen und ■ Tipps zum Einsatz

M 1 Die Gründung Karthagos – mit einer Kuhhaut ein möglichst großes Stück Land umspannen

■ An dieser Stelle sind unterschiedliche Ansätze denkbar. Historisch betrachtet, wird vermutet, dass Dido die Kuhhautstreifen zu einem **Halbkreis** auslegte. Der **isoperimetrischen Ungleichung** nach würde diese Form den größtmöglichen Flächeninhalt bilden. Ein Vollkreis scheidet durch die geografischen Gegebenheiten aus (Küstenlinie).

M 2 Anleitung für ein Rechteck – den Flächeninhalt maximieren

Aufgabe 1

Hauptbedingung: $A = a \cdot b$

Nebenbedingung: $1 = 2a + 2b \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} - b$

Zielfunktion: $A(b) = -b^2 + \frac{1}{2}b$

Lösung: Es handelt sich bei dem Rechteck um ein Quadrat mit den Seitenlängen

$$a = \frac{1}{4} \text{ cm.}$$

Aufgabe 2

Hauptbedingung: $A = a \cdot b$

Nebenbedingung: $1,5 = 2a + 2b \Leftrightarrow a = \frac{3}{4} - b$

Zielfunktion: $A(b) = -b^2 + \frac{3}{4}b$

Lösung: Es handelt sich bei dem Rechteck ebenfalls um ein Quadrat. Es hat die Seiten-

$$\text{längen } a = \frac{3}{8} \text{ cm.}$$

Aufgabe 3

Hauptbedingung: $A = a \cdot b$

Nebenbedingung: $U = 2a + 2b \Leftrightarrow a = \frac{U}{2} - b$

Zielfunktion: $A(b) = -b^2 + \frac{U}{2}b$

Es gilt: $A'(b) = -2b + \frac{U}{2}$ und $A''(b) = -2$.

Aus der notwendigen Bedingung für Extrema folgt:

$$-2b + \frac{U}{2} = 0 \Leftrightarrow b = \frac{U}{4}.$$

Daraus folgt, dass das gesuchte Rechteck immer ein Quadrat sein muss.