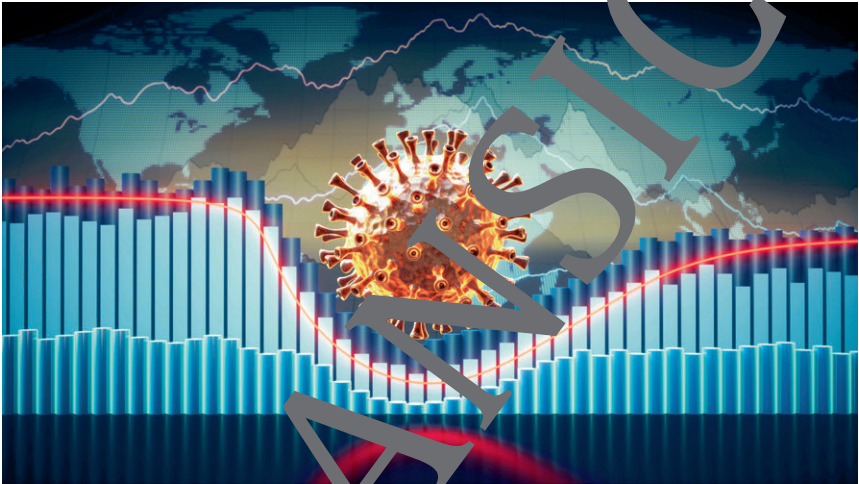


Den Mittelwert einer Funktion auf einem Intervall berechnen

Carlo Vöst, Oliva, Spanien
Illustrationen von C. Vöst



© matejmo/E+/Getty Images Plus

Wie viele Menschen infizieren sich wöchentlich durchschnittlich mit dem Corona-Virus? Dies ist nicht nur für die Johns Hopkins-Universität interessant, sondern stellt eine aktuelle Anwendung des Mittelwerts von Funktionen dar.

Vom Begriff des arithmetischen Mittels ausgehend erarbeiten sich die Lernenden in diesem Beitrag den Mittelwert von Funktionswerten. Dies führt sie schließlich zum Mittelwertsatz der Integralrechnung, dessen Beweis sie ebenfalls kennenlernen. Als Ausblick versteht sich der Beitrag auch den verwandten Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Die vorgestellten Beispiele vertiefen Ihre Schülerinnen und Schüler an einigen Aufgaben und zur Lernzielkontrolle finden Sie am Ende des Beitrags eine Klassenarbeit.

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek. II

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß § 60b UrhG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung in Klassensatzstärke zu vervielfältigen. Jede darüber hinausgehende Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder ins Internet-Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Kopien an Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. VZMA-meldepflichtig.

Für jedes Material wurden die Rechte recherchiert und ggf. angefragt.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Raabe Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Annette de Witte
Satz: Raabe Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: matejmo/E+/Getty Images Plus
Illustrationen: Dr. W. Zettlmeier, Barbing
Lektorat: Maria Hitznauer, Regensburg
Korrektur: Daniela Link, Mönchgladbach

Den Mittelwert einer Funktion auf einem Intervall berechnen

Oberstufe (weiterführend)

Carlo Vöst, Oliva, Spanien

Illustrationen von C. Vöst

Hinweise	1
M 1 Mittelwert auf Intervall – Theorie	2
M 2 Aufgaben	6
M 3 Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen!	10
Lösungen	12

Die Schüler lernen:

den Mittelwert von Funktionen, den Mittelwertsatz der Integral- und Differenzialrechnung an konkreten Beispielen kennen und festigen ihr neues Wissen mithilfe von realitätsnahen Aufgaben. Besonders interessierte Lernende erarbeiten sich den Beweis des Mittelwertsatzes der Integralrechnung.





Überblick:

Legende der Abkürzungen:

Ab = Arbeitsblatt **LEK** = Lernerfolgskontrolle

Thema	Material	Methoden
Mittelwert auf Intervall – Theorie	M1	Ab
Aufgaben	M2	Ab
Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen!	M3	Ab, LEK

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Kompetenzprofil:

Inhalt: arithmetisches Mittel, Mittelwert von Funktionswerten, Mittelwertsatz der Integralrechnung, Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Medien: Taschenrechner, CAS-Rechner

Kompetenzen: mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), mathematisch kommunizieren (K6)

Den Mittelwert einer Funktion auf einem Intervall berechnen

Hinweise zum Mittelwert einer Funktion

Den Mittelwert einer Funktion (genauer der Funktionswerte) auf einem Intervall zu berechnen, basiert auf dem Mittelwertsatz der Integralrechnung, der in diesem Beitrag vorgestellt wird. Der Beweis dieses Mittelwertsatzes ist wohl nur für sehr gute Schülerinnen und Schüler¹ bzw. interessierte Kolleginnen und Kollegen gedacht, welche die Hintergründe genauer interessieren.

Im Lehrplan ist dieses Thema nach der Besprechung des Integrationsbegriffs angesiedelt und wird deshalb sicherlich eines der letzten Themen im Rahmen der Analysis vor dem Abitur sein.

Bei den unterstützenden Aufgaben sollten Sie darauf achten, dass Ihre Schüler möglichst viele verschiedene Funktionstypen behandeln und dass auch die Anwendungsaufgaben nicht zu kurz kommen.

Sämtliche Aufgaben sind so gestaltet, dass Ihre Schüler sie sowohl durch Zuhilfenahme eines Taschenrechners als auch durch Verwendung eines CAS-Rechners, was in vielen Fällen wesentlich weniger Rechearbeit erfordert, lösen können.

Das Material **M 3** ist ein Klausurbeispiel zu diesem Thema, das den Lernenden helfen soll, sich auf eine Prüfung zu diesem Thema vorzubereiten. Außerdem können Sie das Klausurbeispiel zur Lernzielkontrolle verwenden.

¹ Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im weiteren Verlauf nur noch „Schüler“ verwendet.

M 1 Mittelwert auf Intervall – Theorie

Unter dem arithmetischen Mittel M (oder auch arithmetischem Mittelwert m) von n Zahlen a_1, \dots, a_n versteht man:

$$M = \frac{1}{n} \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n a_i.$$

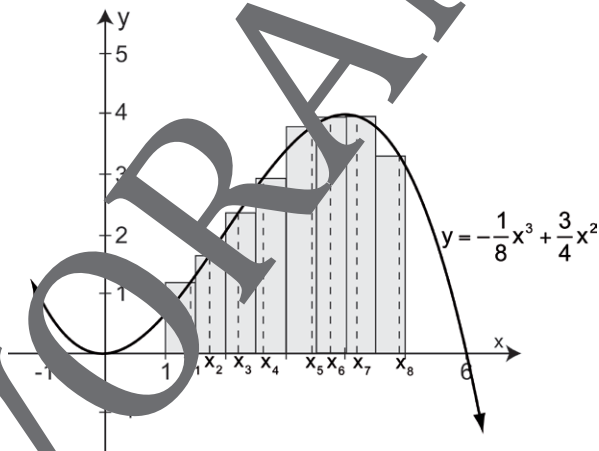
Dies lässt sich auf Funktionswerte übertragen:

Wenn f eine auf einem Intervall $[a; b]$ stetige Funktion ist, geht man folgendermaßen vor:

- Das Intervall $[a; b]$ wird in n Teilintervalle der Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ unterteilt
- In jedem Teilintervall nimmt man (beliebig) einen Funktionswert $f(x_i)$
- Man bildet das arithmetische Mittel dieser Funktionswerte: $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i)$
- Man formt den Term von M algebraisch um mit $n \cdot \Delta x = b - a$

$$M = \frac{\Delta x}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i) = \frac{1}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^n (f(x_i) \cdot \Delta x)$$

Dieses Vorgehen lässt sich in der folgenden Abbildung erkennen. Es wird beispielhaft die Funktion f , gegeben durch $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$, im Intervall $[1; 5]$ für $n=8$ betrachtet:



© RABE Vöst

$$\text{Es gilt dann: } M = \frac{\Delta x}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i) = \frac{0,5}{5-1} \cdot \sum_{i=1}^8 f(x_i) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^8 (f(x_i) \cdot 0,5)$$

- Man bildet nun den „Grenzwert“ (d. h., man vergrößert den Wert von n immer mehr):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n (f(x_i) \cdot \Delta x) \right) = \frac{1}{b-a} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n (f(x_i) \cdot \Delta x) \right) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

(Dies ist natürlich kein Grenzwert im Sinne der Analysis.)

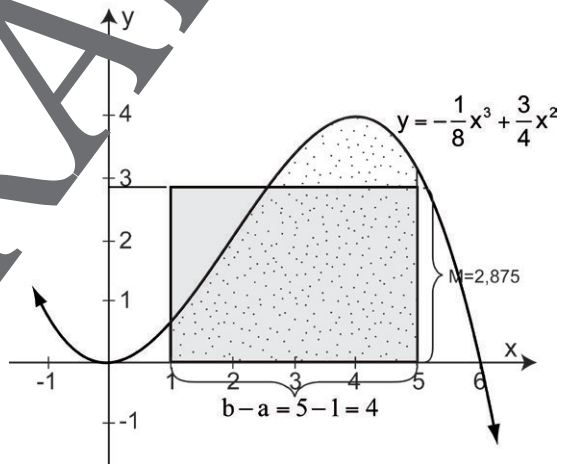
Definition

Sei f eine stetige Funktion. Der Mittelwert M von der Funktion f auf dem Intervall $[a; b]$ berechnet sich als $M = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$.

Fortsetzung des oben angegebenen Beispiels:

$$M = \frac{1}{5-1} \cdot \int_1^5 \left(-\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \right) dx = \frac{1}{4} \cdot \left[-\frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{4}x^3 \right]_1^5 = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{625}{32} + \frac{125}{4} + \frac{1}{32} - \frac{1}{4} \right) = \frac{23}{8} = 2,875$$

Die geometrische Bedeutung des Mittelwerts M lässt sich jetzt sehr gut an nebenstehender Graphik erkennen. Die graue und die gepunktete Fläche haben den gleichen Inhalt: Die Abbildung zeigt außerdem, dass der Mittelwert M der Funktionswerte offenbar selbst auch ein Funktionswert von f ist (etwa bei $x = 2,6$ und bei $x = 5,1$). Dies lässt sich auch analytisch beweisen.



© Carlo Vöst

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist f eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetige Funktion, dann gibt es ein $c \in]a; b[$, sodass gilt:

$$(b-a) \cdot f(c) = \int_a^b f(x) dx \quad . \text{ (wird oft auch so dargestellt: } f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx)$$

Beweis:

Wegen der Stetigkeit von f in $I = [a; b]$ gibt es nach dem Satz vom Minimum und Maximum Zahlen $m, M \in I$ mit $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$.

1. Fall: $f(m) = f(M)$: dann gilt: $f(x) = f(m)$, d. h. $f(x)$ konstant.

$$\text{Wählen Sie ein } c \in]a; b[, \text{ dann gilt: } \int_a^b f(x) dx = \underbrace{f(m)}_{=f(c)} \cdot (b-a) = f(c) \cdot (b-a);$$

2. Fall: $f(m) < f(M)$: $f(x) \geq f(m)$ für alle $x \in I$ und es gibt ein $\xi \in [a; b]$ mit $f(\xi) > f(c)$, (z. B. M) deshalb gilt dann:

$$\int_a^b f(x) dx > \int_a^b f(m) dx = f(m) \cdot (b-a) < f(c) \cdot (b-a) < \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx < \int_a^b f(M) dx = f(M) \cdot (b-a) \Leftrightarrow f(M) > \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $c \in [a; b]$, das zwischen m und M liegt, also $c \neq a, c \neq b$ mit der Eigenschaft: $f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$.

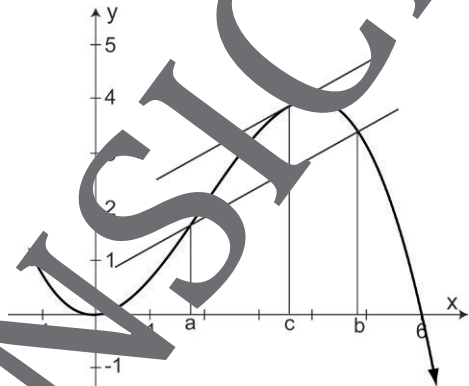
Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Ist f eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetige Funktion und im offenen Intervall $]a; b[$ differenzierbare Funktion, dann gibt es mindestens eine Stelle c mit $a < b < c$, sodass gilt:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Veranschaulichung:

Geometrische Deutung: Es gibt in dem Intervall in mindestens einem Punkt eine „mittlere Steigung“ des Graphen von f , welche durch die Sekantensteigung $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ beschrieben wird.



Schreibt man

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a)$$

als

$$F(b) - F(a) = F'(c) \cdot (b - a) \Leftrightarrow F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

so folgt der Mittelwertsatz der Differentialrechnung aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung für die Stammfunktion F .

M 2 Aufgaben

Schwierigkeitsstufe:



Aufgabe 1



Aufgabe 2

- Gegeben ist die quadratische Funktion f durch $f: x \mapsto -x^2 + 9x - 8$; $D_f = \mathbb{R}$.
 - Berechnen Sie Scheitel und Nullstellen der zugehörigen Parabel und zeichnen Sie den Graphen von f in ein Koordinatensystem.
 - Berechnen Sie den Mittelwert M der Funktionswerte von f auf dem Intervall $[1,5; 6]$.
 - Berechnen Sie die Stelle x_1 , für die gilt: $f(x_1) = M$.
 - Stellen Sie die grafische Bedeutung des (in Teilaufgabe b) berechneten Mittelwerts durch Markieren entsprechender inhaltsgleicher Flächen dar.

- Gegeben ist die Funktion f durch: $f: x \mapsto \frac{4x^2 - 3}{2}$; $D_f = \mathbb{R}^+$.

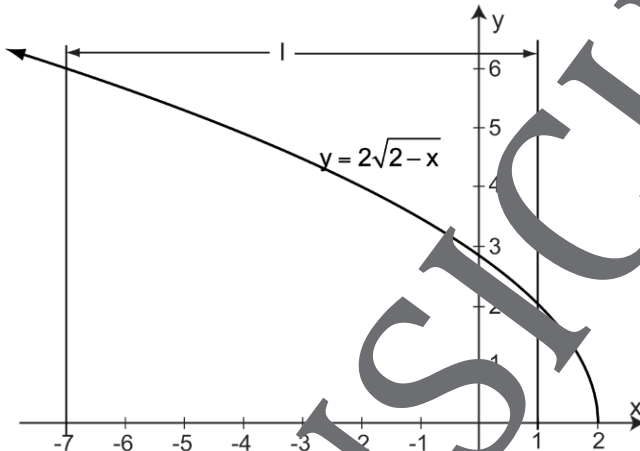
- Berechnen Sie den Mittelwert M der Funktionswerte von f auf dem Intervall $[1; 4]$.
- Berechnen Sie die Stelle x_1 , für die gilt: $f(x_1) = M$.
- Ergänzen Sie die folgende Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $]0; 8]$.

x	0,6	1	2	3	4	8
f(x)						

- Stellen Sie die grafische Bedeutung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung durch Markieren entsprechender inhaltsgleicher Flächen dar.
- Berechnen Sie diejenige Stelle x_2 im Intervall $[1; 4]$, an der die Tangentensteigung gleich der Sekantensteigung für dieses Intervall ist. Stellen Sie diesen Sachverhalt auch in der Zeichnung von Teilaufgabe c) grafisch dar.



3. Gegeben ist die Funktion f durch: $f: x \mapsto 2 \cdot \sqrt{2-x}$; $D_f = \{x \mid x \leq 2\}$.
Der Graph von f ist untenstehend abgebildet.
Betrachtet wird im Weiteren das Intervall $I = [-7; 1]$.



© Carlo Vöst

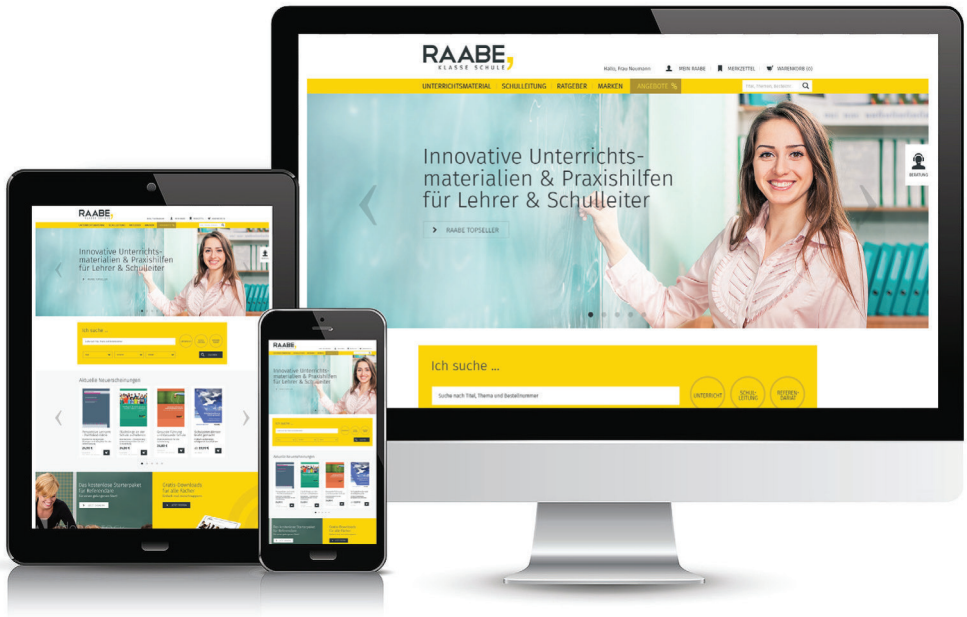
- Berechnen Sie den Mittelwert M der Funktionswerte von f auf dem Intervall I .
- Berechnen Sie auch die Stelle x_1 , für die gilt: $f(x_1) = M$.
- Berechnen Sie diejenige Stelle x_2 in I , an der die Tangentensteigung gleich der Sekantensteigung auf das Intervall I ist.



4. Eine Wetterstation misst an einem Novembertag zwischen 8 Uhr und 18 Uhr die Temperatur, die an diesem Tag (näherungsweise) durch die Funktion f gegeben wird durch $f(t) = -\frac{1}{15}t^3 + \frac{2}{3}t^2 + 2$, t in Stunden seit 8 Uhr, $0 \leq t \leq 10$, in Grad Celsius.

- Zeigen Sie, dass an diesem Tag um 8 Uhr und um 18 Uhr die gleiche Temperatur vorliegt. Welche ist das?
- Bestimmen Sie die Tageshöchsttemperatur (auf 1 Dezimale genau) und zu welcher Uhrzeit sie erreicht wird.
- Ermitteln Sie die Durchschnittstemperatur (auf 1 Dezimale genau) im Beobachtungszeitraum.
- Begründen Sie, warum der Temperaturverlauf außerhalb des angegebenen Zeitraums durch die Funktion f nicht realistisch ist.

Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:



Schnelle und intuitive Produktsuche



Übersichtliches Kundenkonto



Komfortable Nutzung über
Computer, Tablet und Smartphone



Höhere Sicherheit durch
SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de