Das Volumen eines Rotationskörpers – alltagsbezogene Übungsaufgaben

Nico Lorenz, Waltrop

Foto: Frank Rosskoss/pixelio.de

Ein Kinder-Swimmingpool ist ein Rotationskörper.

Klasse:	12
Dauer:	1–2 Stunden
Inhalt:	Bestimmen von Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften, Rotationsvolumina und Eigenschaften trigonometrischer Funktionen
Ihr Plus:	Aufgrund der Breite des abgefragten Stoffs eignet sich diese Aufgabe wunderbar als Vorbereitung für die Abiturklausur.

Im alltäglichen Leben sehen wir mehr Rotationskörper, als man auf Anhieb vermuten würde: Blumenvasen, Urnen, Töpfe (Kochtöpfe [die oft sogar Zylinder sind], Blumentöpfe), Gläser (Trinkgläser, Marmeladengläser), Pylonen, Mülleimer ... Der Beitrag nutzt diese Tatsache aus, um das mathematische Problem der Berechnung des Volumens eines solchen Körpers in einem praxisnahen Kontext zu behandeln.

Didaktisch-methodische Hinweise

Fachliche Voraussetzungen

Die Schüler sollten vertraut sein mit dem Bestimmen von Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften (**Steckbriefaufgaben**), mit trigonometrischen Funktionen und mit dem Berechnen des **Volumens von Rotationskörpern**:

Für das Volumen V eines Rotationskörpers, der durch Rotation des Graphen der integrierbaren Funktion f um die x-Achse im Intervall $[a, b]$ entsteht, gilt

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx.$$

Die Aufgaben sind so gestellt, dass sie per Hand gelöst werden können. Für einige Teile bietet es sich jedoch an, ein **Computer-Algebra-System** als Unterstützung zu benutzen (zum Beispiel für das Lösen des auftretenden linearen Gleichungssystems).

Weiterhin sollten die Schüler die **partielle Integration** beherrschen:

Für stetig differenzierbare Funktionen f,g: [a, b] $\to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx.$$

Schließlich sollten den Schülern grundlegende Zusammenhänge zwischen den Winkelfunktionen bekannt sein, insbesondere der **trigonometrische Pythagoras**

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Inhalt

Die Schüler bestimmen anhand vorgegebener Daten durch Lösen eines linearen Gleichungssystems eine **ganzrationale Funktion**, welche die Form eines Swimmingpools modelliert. Mithilfe dieser Funktion wird das Volumen des Pools mithilfe eines **Integrals** berechnet, um so zu ermitteln, wie lange es dauert, bis der Pool vollständig gefüllt ist.

In einer weiteren Aufgabe wird dasselbe Vorgehen benutzt, um die gleichen Berechnungen für eine **trigonometrische Funktion** durchzuführen. In dieser Aufgabe üben die Schüler zusätzlich eine **spezielle Integrationstechnik** ein.

Inhaltlicher Schwerpunkt und außerfachliche Extras

Besonders gefördert wird das **Verständnis von ganzrationalen und trigonometrischen Funktionen**. Dies beinhaltet insbesondere die Berechnung von **Nullstellen** und **Ableitungen** sowie weiterführende Zusammenhänge zwischen Sinus und Kosinus (trigonometrischer Pythagoras). Weiterhin werden spezielle Integrationstechniken, aufbauend auf dem Verfahren der partiellen Integration, vertieft.
Das Material zeichnet sich durch einen **hohen Alltagsbezug** inklusive einer **praktischen Anwendung im Alltag** aus.

Vorbereitungen

Laminieren Sie die Tippkarten (**M 2**) und legen Sie diese auf dem Lehrerpult aus. Legen Sie **wasserlösliche Folienstifte** bereit.

Ablauf

Verteilen Sie die Arbeitsblätter an Ihre Schüler und teilen Sie diese in Kleingruppen ein. Projizieren Sie die Folie (**M 3**) auf eine Leinwand und verdecken Sie zunächst das Koordinatenkreuz, um die Aufmerksamkeit auf den Pool zu fokussieren. Erklären Sie in wenigen Worten die Grundsituation, wie sie auch in Material **M 1** beschrieben ist: Familie Hoffmann möchte ihren neuen Pool im Garten aufbauen und möchte im Voraus die Zeit abschätzen, wie lange es dauert, bis der Pool vollständig gefüllt ist.

Entwickeln Sie anschließend im Plenum das Vorgehen und die dazu nötigen Daten, mit denen die Aufgabe gelöst werden soll:

Gesucht wird eine möglichst gute Näherung an das Fassungsvermögen des Pools. Die Schüler sollten dabei selbstständig (aber bei Bedarf unter Anleitung) auf die Idee kommen, den Pool durch eine Funktion zu beschreiben, um die Formel für das Volumen eines Rotationskörpers anwenden zu können. Diskutieren Sie weiterhin mit den Schülern im Plenum technische Feinheiten, wie die nötige Drehung des Pools sowie die Wahl des Mittelpunkts des Pools im Nullpunkt des Koordinatenkreuzes. Lassen Sie für Letzteres Schüler ihre Ideen auf die Folie zeichnen und diskutieren und bewerten Sie die unterschiedlichen Vorschläge. Fordern Sie nun ihre Schüler auf, **Aufgabe 1** und **Aufgabe 2** in den zuvor festgelegten Kleingruppen zu bearbeiten.

Lassen Sie eine oder mehrere Gruppen ihre Ergebnisse vorstellen, ehe die Schüler in einer zweiten Bearbeitungsphase schließlich **Aufgabe 3** bearbeiten.

Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler …	Anforderungsbereich
K 2, K 3, K 6	L 2, L 3	… stellen Gleichungssysteme auf und lösen diese zwecks Modellierung der Form eines Pools. Anhand dieser Daten wird dessen Volumen mittels Integralrechnung berechnet (**M 1**).	II, III

Abkürzungen

Kompetenzen

K 1 (Mathematisch argumentieren); K 2 (Probleme mathematisch lösen); K 3 (Mathematisch modellieren); K 4 (Mathematische Darstellungen verwenden); K 5 (Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen); K 6 (Kommunizieren)

Leitideen

L 1 (Zahl und Zahlbereich); L 2 (Messen und Größen); L 3 (Raum und Form); L 4 (Funktionaler Zusammenhang); L 5 (Daten und Zufall)

Anforderungsbereiche

I Reproduzieren; II Zusammenhänge herstellen; III Verallgemeinern und Reflektieren

Auf einen Blick

Material	Thema
Einstieg M 3 (Fo)	**Im Garten steht ein Rotationskörper!** Farbfolie, mit deren Hilfe Sie in die behandelte Problematik einführen sollen und auf deren Grundlage erste Ansätze entwickelt werden
M 1	**Wann können wir schwimmen?** Aufgabenmaterial zum Volumen eines Pools, welcher als Rotationskörper modelliert werden soll
M 2	**Tippkarten** Tippkarten zu einzelnen Aufgabenteilen

Minimalplan

Falls keine Zeit für das vollständige Material zur Verfügung steht, können auch nur Aufgabe 1 und Aufgabe 2 bearbeitet werden. Dabei wird der wesentliche Modellierungsaspekt eingeübt, jedoch nicht die Feinheiten von trigonometrischen Funktionen und deren Integration.

Lehrplanbezug

Der Lehrplan Bayern[1] weist diese Stichworte auf:

- bestimmtes Integral, Integralfunktion (ca. 10 Stunden)
- Zusammenhänge zwischen den Graphen von Funktion, Ableitungsfunktion und Integralfunktionen (ca. 3–4 Stunden)

Der Kernlehrplan Nordrhein-Westfalen[2] weist folgende Stichworte auf:

- Bestimmen von Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen
- Bestimmen von Volumina von Körpern, die durch Rotation um die Abszisse entstehen mithilfe von bestimmten Integralen

Mediathek

Zur einfachen Berechnung der **binomischen Formel** eignet sich:

http://www.schule-verstehen.de/Verstehen/Mathematik/Binomische-Formeln-Rechner

Viele Berechnungen, wie z. B. das Lösen linearer Gleichungssysteme, lassen sich mit einem CAS-Taschenrechner oder in der CAS-Ansicht von GeoGebra schnell und einfach durchführen.

[1] http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26192

[2] http://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_SII/m/KLP_GOSt_Mathematik.pdf

M 1 Wann können wir schwimmen?

Familie Hoffmann hat sich vor kurzem einen sog. Quick-up-Pool gekauft. Da für die nächsten Tage schönes Wetter vorhergesagt wird, will sie ihn schleunigst aufbauen und darin baden. Doch wie viel Wasser passt überhaupt in den Pool? Und wie lange dauert es, bis der Pool mit Wasser gefüllt ist?

Foto: iStock / Thinkstock

Der Sonnenschirm und der Pool sind bereits aufgestellt, nur das Wasser fehlt noch.

Tipp

Sie haben gelernt, wie man das Volumen von Rotationskörpern berechnet. Der Pool hat eine passende Form.

Die Maße:

Der Boden des Pools hat einen Durchmesser von **3 m**. Dies ist auch der Durchmesser in einer Höhe von **1,1 m**, bis zu der der Pool mit Wasser gefüllt werden soll. Die breiteste Stelle befindet sich in einer Höhe von **0,5 m**. Dort ist der Pool **3,5 m** breit.

Aufgabe 1

Berechnen Sie das gesuchte Volumen, indem Sie eine Außenkante des Pools mit einer **ganzrationalen Funktion 3. Grades** beschreiben und anschließend das Volumen des zugehörigen Rotationskörpers berechnen. Zeichnen Sie auch die Funktion in ein geeignetes Koordinatensystem.

Der Vater hat eine Idee, wie man mit dem Volumen nun die Zeit berechnen kann, bis der Pool voll ist. Er weiß, dass aus einem Wasserhahn **ca. 20 l Wasser pro Minute** laufen.

Aufgabe 2

Wie lange dauert es, bis der Pool vollständig gefüllt ist?

Aufgabe 3

Familie Wenk hat einen etwas kleineren Pool, dessen Außenkante besser durch eine Funktion der Form

$g(x) = a \cdot \sin(b \cdot x) + c$ für geeignete a, b, c $\in \mathbb{R}$

beschrieben werden kann. Bekannt ist, dass der Pool bei einer Höhe von **25 cm** die maximale Breite von **2,5 m** annimmt und in einer Höhe von $\mathbf{58\frac{1}{3}}$ cm, der Füllhöhe des Pools, noch einen Durchmesser von **2,25 m** hat.

Helfen Sie auch Familie Wenk, indem Sie die obigen Fragen für ihren Pool beantworten.

Foto: Frank Rosskoss/pixelio.de

Sohn Paul ist im Wasser. Doch wann ist der Pool von Familie Wenk gefüllt?

M 2 Tippkarten

1. Tipp zu **Aufgabe 1**

Eine ganzrationale Funktion dritten Grades hat die Form

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d;\ \ a, b, c, d \in \mathbb{R}.$

Mithilfe der angegebenen Werte kann ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten aufgestellt werden, welches es zu lösen gilt.

2. Tipp zu **Aufgabe 1**

Für einen Rotationskörper der Höhe h, dessen Außenkante durch die Funktion im Intervall [0, h] beschrieben wird, kann das Volumen mittels

$$V(h) = \pi \cdot \int_0^h (f(x))^2\, dx$$

berechnet werden.

1. Tipp zu **Aufgabe 3**

Stellen Sie wie in Aufgabe 1 ein Gleichungssystem auf, um die Parameter a, b, $c \in \mathbb{R}$ zu bestimmen.

2. Tipp zu **Aufgabe 3**

Die Nullstellen des Kosinus liegen bei

$$\ldots, -\frac{3}{2} \cdot \pi,\quad -\frac{1}{2} \cdot \pi,\quad \frac{1}{2} \cdot \pi,\quad \frac{3}{2} \cdot \pi, \ldots$$

Welche davon brauchen Sie?

3. Tipp zu **Aufgabe 3**

Um das Volumen zu berechnen, teilen Sie das Integral in geeignete Teile auf. Das schwierigste der Integrale lässt sich durch partielle Integration, Benutzen der Formel

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (trigonometrischer Pythagoras)

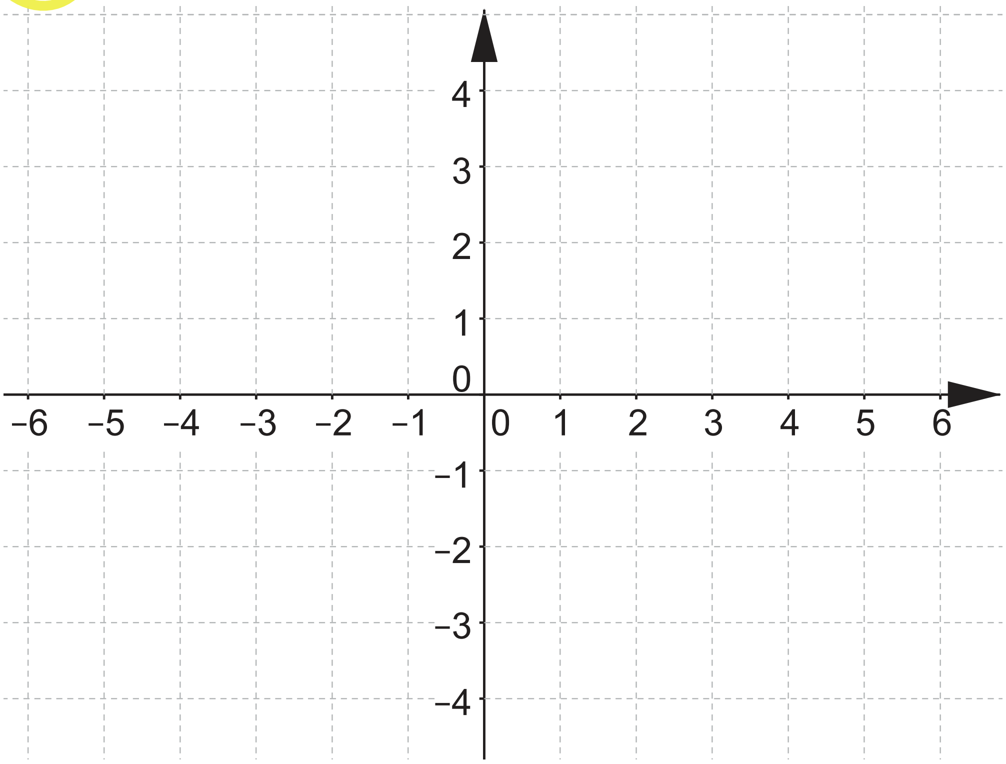
und geeignete Äquivalenzumformungen berechnen.

M 3 Im Garten steht ein Rotationskörper!

Foto: Frank Rosskoss/pixelio.de

Der Pool von Familie Hoffmann.

Schematische Darstellung der Funktion für die Außenkante des Pools:



Lösungen und ■ Tipps zum Einsatz

M 1 Wann können wir schwimmen?

Aufgabe 1

Die gesuchte Funktion hat die Form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Es gilt dann: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Aus den angegebenen Maßen ergeben sich die folgenden Bedingungen für die Funktion f (dabei beachte man, dass die Werte halbiert werden müssen):

$$\frac{3}{2} = f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = d$$

$$\frac{3}{2} = f(1{,}1) = a \cdot 1{,}1^3 + b \cdot 1{,}1^2 + c \cdot 1{,}1 + d = \frac{1331}{1000}a + \frac{121}{100}b + \frac{11}{10}c + \frac{3}{2}$$

$$\frac{7}{4} = f(0{,}5) = a \cdot 0{,}5^3 + b \cdot 0{,}5^2 + c \cdot 0{,}5 + d = \frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c + \frac{3}{2}$$

$$0 = f'(0{,}5) = 3a \cdot 0{,}5^2 + 2b \cdot 0{,}5 + c = \frac{3}{4}a + b + c.$$

Die letzte Bedingung ergibt sich daraus, dass die breiteste Stelle ein lokales Extremum darstellt und folglich die erste Ableitung an dieser Stelle gleich null sein muss.

Da sich d direkt aus der ersten Gleichung ergibt, ist das noch zu lösende lineare Gleichungssystem nach Äquivalenzumformungen gegeben durch

$$\frac{1331}{1000}a + \frac{121}{100}b + \frac{11}{10}c = 0$$

$$\frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4}a + b + c = 0$$

und hat die Lösung $a = \frac{5}{18}, b = -\frac{23}{18}, c = \frac{77}{72}$. Die gesuchte Funktion ist also gegeben durch

$$f(x) = \frac{5}{18}x^3 - \frac{23}{18}x^2 + \frac{77}{72}x + \frac{3}{2}.$$

Für das Volumen V ergibt sich mit der Formel für das Volumen eines Rotationskörpers:

$$V = \pi \cdot \int_0^{1{,}1} \left(\frac{5}{18}x^3 - \frac{23}{18}x^2 + \frac{77}{72}x + \frac{3}{2}\right)^2 dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^{1{,}1} \left[\left(\frac{5}{18}x^3 - \frac{23}{18}x^2 + \frac{77}{72}x\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{5}{18}x^3 - \frac{23}{18}x^2 + \frac{77}{72}x\right) \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^{1{,}1} \left[\frac{25}{324}x^6 - \frac{115}{162}x^5 + \frac{481}{216}x^4 - \frac{1771}{648}x^3 + \frac{5929}{5184}x^2 + 3 \cdot \left(\frac{5}{18}x^3 - \frac{23}{18}x^2 + \frac{77}{72}x\right) + \frac{9}{4}\right] dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^{1{,}1} \left[\frac{25}{324}x^6 - \frac{115}{162}x^5 + \frac{481}{216}x^4 - \frac{1231}{648}x^3 - \frac{13\,943}{5184}x^2 + \frac{77}{24}x + \frac{9}{4}\right] dx$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{25}{2268}x^7 - \frac{115}{972}x^6 + \frac{481}{1080}x^5 - \frac{1231}{2592}x^4 - \frac{13\,943}{15\,552}x^3 + \frac{77}{48}x^2 + \frac{9}{4}x\right]_0^{1{,}1}$$

$$\approx \pi \cdot 3{,}0566 \approx 9{,}602\ [m^3] = 9602\ [l].$$