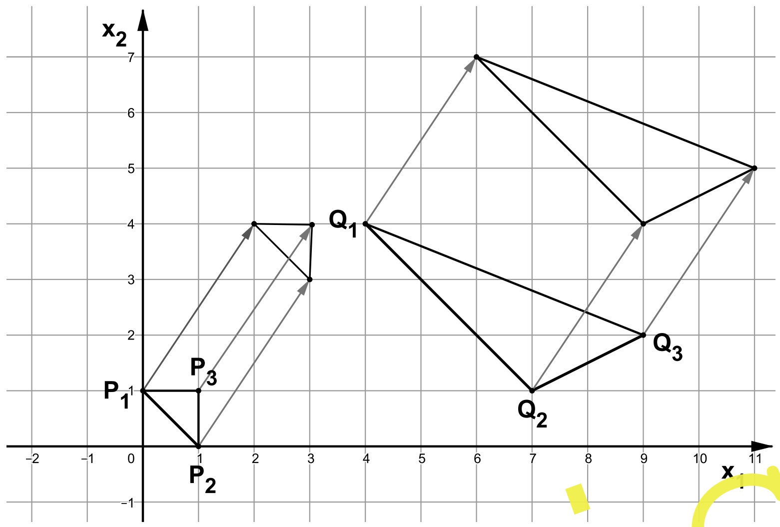
Lineare und affine Abbildungen im zweidimensionalen Anschauungsraum $\mathbb{R}^2$

Dr.Jürgen Bohla, Wuppertal



Eine Verschiebung

Mit MS Excel-Programm affabb.xls!

Klasse: 11/12

Dauer: 4 Stunden

Inhalt:

Stunde 1: Begriff der linearen Punktabbildung, Typen linearer Abbildungen, Teil I

Stunde 2: Typen linearer Abbildungen Teil II, Bestimmung linearer Abbildungen

Stunde 3: Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume linearer Abbildungen

Stunde 4: Fixelemente linearer Abbildungen

Ihr Plus:

✓ Systematische Übersicht über die Grundlagen des Themas „Lineare Abbildungen“

✓ Die Verschiebung als einfachste affine Abbildung.

Die Skizze oben zeigt die Bilder zweier kleiner Dreiecke unter einer Verschiebung, der einfachsten affinen Abbildung. Bilder sind immer Abbilder von „etwas anderem“, einem „Urbild“. Den Mathematiker interessiert speziell die Frage, wie die Beziehung zwischen Urbild und Bild arithmetisch, also durch einen **Rechenausdruck** beschrieben werden kann. Die Formulierung einer Abbildungsvorschrift, ist wichtig, wenn ein Muster zu Produktionszwecken beliebig reproduzierbar sein soll. Solche Verfahren werden z. B. in der **Fotografie**, in der **Architektur**, in der **Kartografie** und bei der **Erstellung von Computergrafiken** benötigt. In diesem Beitrag geht es speziell um verschiedene Typen linearer Abbildungen und deren Abbildungsvorschriften sowie um die Verschiebung als einfachster affiner Abbildung.

Tafelbilder

Stunde 1

Abbildungsgleichung:

$\vec{x}' = A\vec{x}$

Abbildungszentrum:

Ursprung (0|0)

Identische Abbildung:

$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$,

kurz: $\vec{x}' = I\vec{x}$; I = 2-reihige Einheitsmatrix

Punktspiegelung an der x_1-Achse (Kongruenzabbildung):

$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$

Punktspiegelung im Ursprung (Kongruenzabbildung):

$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$

Zentrische Streckung mit Streckungsfaktor k: (Ähnlichkeitsabbildung)

$\vec{x}' = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$,

kurz: $\vec{x}' = k * I * \vec{x} = k\vec{x}$

Stunde 2

Weitere Abbildungstypen und ihre Abbildungsmatrizen:

Senkrechte Parallelstreckung Richtung x_2-Achse:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$

r = Streckungsfaktor

Scherung:

$A = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, r = Scherungsfaktor

Drehung:

$A = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$

β = Drehwinkel im mathematisch positiven Drehsinn

Tafelbilder – Fortsetzung

Stunde 3

Charakteristisches Polynom zur Bestimmung von Eigenwerten:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a_{11}-\lambda)\cdot(a_{22}-\lambda)-a_{12}\cdot a_{21}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2-\lambda(a_{11}+a_{22})+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2-\lambda \mathrm{sp}A+\det(A)=0$$

Die reellen Nullstellen des Polynoms sind die **Eigenwerte** der Vektorabbildung.

Homogenes LGS zur Ermittlung von **Eigenvektoren**:

$$A\vec{v}=\lambda\vec{v} \Leftrightarrow (A-\lambda I)\vec{v}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{11}v_1+a_{12}v_2=\lambda v_1 \qquad (1)$$

$$a_{21}v_1+a_{22}v_2=\lambda v_2 \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{11}v_1-\lambda v_1+a_{12}v_2=0 \qquad (1')$$

$$a_{21}v_1+a_{22}v_2-\lambda v_2=0 \qquad (2')$$

Stunde 4

Arten von Fixelementen linearer Abbildungen:

1. Fixpunkte:

   Punkte linearer Abbildungen, bei denen Urbildpunkt und Bildpunkt zusammenfallen

2. Fixpunktgerade:

   Geraden g, bei denen alle Punkte Fixpunkte sind

3. Fixgeraden:

   Geraden g, die mit ihren Bildgeraden zusammenfallen

   Fixpunktbedingung:

   $A*\vec{f}=\vec{f} \Leftrightarrow A*\vec{f}-\vec{f}=0 \Leftrightarrow A*\vec{f}-I*\vec{f}=0 \Leftrightarrow (A-I)*\vec{f}=0$

Auflösung des homogenen LGS:

a) eindeutige, (triviale) Lösung: Fixpunkt $F(0|0)$ oder

b) unendliche viele Lösungen (= Fixpunktgerade)

   Fixgeraden: mit den Eigenvektoren $\vec{v}$ als Richtungsvektoren:

   Fixgeradenbedingung:

   $(A-I)*\vec{p}=k*\vec{v}$

   ($\vec{p}=$ Ortsvektor eines Fixpunkts P)

Auf einen Blick (Stoffverteilungsplan)

Einführung der Grundlagen zum Thema „Lineare Abbildungen"

Material	Thema	Stunde
M 1	**Typen linearer Abbildungen und die Verschiebung** Identität <u>Typen linearer Abbildungen:</u> identische Abbildung, Kongruenzabbildung, zentrische Streckung, Ähnlichkeitsabbildung	1.
M 2	**Typen und Bestimmung linearer Abbildungen** <u>Typen linearer Abbildungen Teil II</u> Parallelstreckung, Scherung, Drehung Bestimmung linearer Abbildungs-Gleichungen	2.
M 3	**Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume lin. Abbildungen** Determinante der Abbildungsmatrix und charakteristisches Polynom, Lösungen und Eigenvektoren, -räume	3.
M 4	**Fixelemente linearer Abbildungen** Fixpunkt, Fixpunktgerade, Fixgeradenbedingung	4.

Ausblick: In einem **Folgebeitrag** erhalten Sie folgende Themen:

Material	Thema	Stunde
M 5	**Normalformen linearer Abbildungen** Begriffe Fixpunktgerade, Fixgeradenbedingung	5.
M 6	**Verkettung und Umkehrabbildung** Voraussetzungen Verkettung | Komposition zweier Abbildungen Umkehrabbildung einer Abbildung	6./7.
M 7	**Affine Abbildungen** Begriff der Abbildungsgleichung Analyse einer affinen Abbildung (Scherung)	8.
M 8	**Drehungen als affine Abbildung** Drehung als Kongruenzabbildung Drehstreckung als Ähnlichkeitsabbildung Affine Drehung	9./10.

Methodischer Hinweis: Jede Stunde schließen Sie mit einer **Hausaufgabe** ab. In der Folgestunde fangen Sie mit der Besprechung der Hausaufgabe an.

M 1 Typen linearer Abbildungen und die Verschiebung

Merke: Die Punkte O, E_1, E_2 bilden in der Zahlenebene des $\mathbb{R}^2$ ein Koordinatensystem mit den Basisvektoren $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$ und $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$. In einem orthonormierten (kartesischen) Koordinatensystem, basierend auf den Einheitsvektoren

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

wird jedem Punkt $X(x_1, x_2)$ der **Ortsvektor** $\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2$ zugeordnet. Ein Ortsvektor wird in einem Koordinatensystem als Linearkombination von Basisvektoren und Koordinaten dargestellt. Die Gleichung $\vec{x}' = A * \vec{x}$ beschreibt eine **lineare Abbildung** a.

Aufgabe 1: Die identische Abbildung

a) Erstellen Sie Abbildungsmatrix und Abbildungsgleichung der **Identität** auf der Basis der Einheitsvektoren.

Geben Sie die zu den Punkten P(2|1) und Q(–2|3) gehörigen Koordinaten der Bildpunkte P´ und Q´ an.

b) Zur besseren Veranschaulichung linearer Abbildungen ist es zweckmäßig, nicht nur Punkte, sondern Flächen zu betrachten. Das **ebene Dreieck** ist die einfachste geschlossene Fläche. Geben Sie für die identische Abbildung die Bilder zu den Dreiecken $P_1(0|1)$, $P_2(1|0)$, $P_3(1|1)$ und $Q_1(4|4)$, $Q_2(7|1)$, $Q_3(9|2)$ an.

Zeichnen Sie die Bilder in ein Koordinatensystem ein und charakterisieren Sie die Abbildung. Wie wirkt sich eine Verschiebung der Figuren um den Vektor $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf die Abbildungsgleichung und Lage der Bilder der Dreiecke aus?

c) Durch Vektoren wird ein Dreieck aufgespannt. Berechnen Sie dessen Fläche mithilfe der **Determinante**, die diesen Vektoren zugeordnet werden kann.

Was sagt das Vorzeichen der Determinante über die Orientierung der Fläche aus?

d) Bilden Sie die Abbildungsmatrizen, welche die Abbildungen unter b) erstens an der x_1- Achse spiegelt, und zweitens am Ursprung spiegelt.

e) Die Koordinaten der Urbilder sollen um den Faktor 2 gestreckt werden. Entwickeln Sie dazu eine geeignete Abbildungsmatrix. Beschreiben Sie die Art der Abbildung im Unterschied zu den vorgenannten Abbildungen.

f) Zeichnen Sie die Graphen zu d) und e) zum Dreieck mit dem Urbild $P_1(1|2)$, $P_2(2|1)$, $P_3(2|2)$. Wo findet man in der Realität Anschauungsbeispiele (Natur, (Bau-)Kunst) für die verschiedenen Arten von Spiegelungen?

Hausaufgabe 1

1. Wie muss die Abbildungsgleichung für eine Spiegelung an der x_2-Achse lauten?
2. Gegeben ist das Viereck $P_1(–1|1)$, $P_2(0|–1)$, $P_3(1|3)$, $P_4(2|2)$. Bilden Sie die Matrix und Gleichung zur Durchführung folgender Abbildung: zentrische Streckung mit dem Faktor k = 1,5 und Spiegelung im Ursprung („Streckspiegelung").
3. Wie lautet die Abbildungsmatrix A der linearen Abbildung $a: A * \vec{x} = \vec{x}'$, die P(–1|0,5) auf P´(–2,5|–1,25) und Q(3|2) auf (7,5|–5) abbildet?

   Welche Art von Abbildung liegt vor?

M 2 Typen und Bestimmung linearer Abbildungen

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix, die das Urbild des Punktes P mit dem Faktor 2 in Richtung der x_2-Achse streckt.

b) Die Punkte

$P_1(0|2)$, $P_2(4|1)$, $P_3(3|-2)$

bilden ein Dreieck. Berechnen Sie sein Bild mit der unter a) ermittelten Abbildungsmatrix, das Affinitätsverhältnis und die Fläche von Urbild und Bild.

Fertigen Sie dazu eine Zeichnung.

c) Ändern Sie die Abbildung so, dass das Urbild parallel zu einer Geraden mit der Steigung 2 gestreckt wird, und ermitteln Sie zum Urbilddreieck von b) das Bild sowie das Affinitätsverhältnis.

d) Gesucht wird eine Abbildungsvorschrift, mit der die Urbildpunkte parallel zur x_1-Achse abgebildet werden können. Zeigen Sie diesen Effekt an zwei Beispielen mit Zeichnung.

e) Das Dreieck

$P_1(3|2)$, $P_2(5|3)$, $P_3(6|2)$

soll zweimal hintereinander, zuerst um 45°, dann um 60° im mathematisch positiven Drehsinn um den Ursprung gedreht werden. Entwickeln Sie die Abbildungsvorschrift, führen Sie die Berechnungen durch und fertigen Sie dazu eine Zeichnung.

f) Begründen Sie: Die Drehung ist eine Kongruenzabbildung.

Tipp

Zur Veranschaulichung und Berechnung der Inhalte von Stunde 1 und 2 können Sie auch das **EXCEL-Programm affab.xls**, Registerblatt „Abbildungen im $\mathbb{R}^2$", Menüpunkte: „Lineare und affine Abbildungen", „Abbildungsgleichungen berechnen" einsetzen.

Hausaufgabe 2

1. Zeigen Sie, dass lineare Abbildungen folgende sog. **Linearitätsbedingungen** erfüllen:

   I) $A * (\vec{x} + \vec{y}) = A * \vec{x} + A * \vec{y}$ und II) $A * (k\vec{x}) = k * A * \vec{x}$.

2. Gegeben ist die Abbildung

   $$a: \vec{x}' = \begin{pmatrix} r & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

   Berechnen Sie das Bild des Dreiecks $P_1(1|1)$, $P_2(3|2)$, $P_3(0|2)$ für $r = -1$ und $r = 2$ und beschreiben Sie die Art der Abbildung.

3. Durch

   $$A = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}866 \\ 0{,}866 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

   wird das Rechteck (1|0, (3|0), (1|1), (3|1) auf ein anderes Rechteck abgebildet.

   Berechnen Sie das Bildrechteck und beschreiben Sie die Art der Abbildung.

M 3 Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume lin. Abbildungen

Vorbemerkung:

Die lineare Abbildung $a: \vec{x}' = A * \vec{x}$ ordnet jedem Punktepaar P, Q das Bildpunktepaar P′, Q′ zu. Mit $\vec{p}' = A * \vec{p}$, $\vec{q}' = A * \vec{q}$, ergibt sich dann:

$\vec{p}' = A * \vec{p}$, $\vec{q}' = A * \vec{q}$,

$\vec{q}' - \vec{p}' = A\vec{q} - A\vec{p} = A(\vec{q} - \vec{p}) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P'Q'} = A(\overrightarrow{PQ})$.

Jedem Punkt wird nicht nur ein Bildpunkt zugeordnet, sondern gleichzeitig auch jedem Vektor $\vec{v}$ sein Bildvektor $\vec{v}'$. Zur Punktabbildung $a: \vec{x}' = A * \vec{x}$ gehört die Vektorabbildung $a: \vec{v}' = A * \vec{v}$. Während bei der identischen Abbildung jeder Punkt bzw. Vektor trivial auf sich selbst abgebildet wird, werden bei anderen Abbildungen nur bestimmte einzelne Elemente auf sich selbst oder skalare Vielfache davon abgebildet. Bezeichnet man diesen Skalar mit λ, dann gilt es also den oder die Werte zu ermitteln, welche die Bedingung $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ erfüllen.

Definition: Ein Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ heißt **Eigenvektor** einer Matrix A, wenn er bei der Multiplikation mit A in ein Vielfaches seiner selbst übergeht, wenn also gilt: $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$. λ heißt dann **Eigenwert** von A.

Aufgabe 3

Gegeben ist die lineare Vektorabbildung

$$a': \vec{v}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \vec{v}.$$

a) Die Abbildung ist auf Eigenwerte zu untersuchen. Dazu muss zunächst ein geeignetes Verfahren, ausgehend vom Ansatz $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, entwickelt werden. Danach können die Eigenwerte berechnet werden.

b) Über die Ermittlung reeller Eigenwerte können dann Eigenvektoren bestimmt werden. Ermitteln Sie nun die Eigenvektoren.

c) Berechnen Sie die Bildpunkte zum Urbilddreieck (0|1), (1|0), (1|1) und stellen Sie Urbilddreieck, Bilddreieck und Eigenvektoren in einer Skizze dar.

d) Bei der Untersuchung einer linearen Abbildung ist es von wesentlichem Interesse, welche Geraden auf parallele Geraden abgebildet werden, d. h. ihre Richtung beibehalten (sog. **Parallelentreue**). Dies ist dann der Fall, wenn der Richtungsvektor der Geraden auf ein Vielfaches abgebildet wird. Zeigen Sie dies an einem Beispiel.

e) Lösen Sie die Aufgaben a) – d) für die Vektorabbildung $a': \vec{v}' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \vec{v}$.

Welche Besonderheit gilt für Eigenvektoren mit dem Eigenwert $\lambda = 1$?

f) Untersuchen Sie die zentrische Streckung $a': \vec{v}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{v}$ auf Eigenvektoren und Eigenräume.

Tipp

Siehe auch das EXCEL-Programm **affab.xls**, Registerblatt: „Abbildungen im $\mathbb{R}^2$“, Menüpunkte: „Lineare und affine Abbildungen“, „Analyse der Abbildung“.

Hausaufgabe zu diesem Thema: siehe Lösungsseite (Kasten).

M 4 Fixelemente linearer Abbildungen

Vorbemerkung:

Fixelemente linearer Abbildungen sind Punktmengen, die auf **sich selbst** abgebildet werden. Die identische Abbildung, bei der jeder Punkt auf sich selbst abgebildet wird und damit Fixpunkt ist, wurde als trivialer Fall einer solchen Abbildung bereits erwähnt. Sie wird daher in dieser Unterrichtseinheit nur am Rande berücksichtigt. Ziel dieser Stunde ist es, lineare Abbildungen daraufhin zu untersuchen, wie Fixelemente ermittelt werden können.

Es sind folgende Arten von Fixelementen zu unterscheiden:

1. Fixpunkte:

   Das sind Punkte linearer Abbildungen, bei denen Urbildpunkt und Bildpunkt zusammenfallen.

2. Fixpunktgeraden: Das sind Geraden g, bei denen alle Punkte Fixpunkte sind.

3. Fixgeraden: Das sind Geraden g, die mit ihren Bildgeraden zusammenfallen.

Aufgabe 4

Gegeben sind die linearen Abbildungen $\vec{x}' = A\vec{x}$

1. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$ 2. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \vec{x}$ 3. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$

a) Um eine lineare Abbildung auf Fixelemente zu untersuchen, sind die Bedingungen zu formulieren, die eine Abbildungsgleichung für die Existenz von Fixelementen erfüllen muss. Entwickeln Sie einen geeigneten Ansatz.

b) Untersuchen Sie nach den unter a) formulierten Beurteilungskriterien die obigen Abbildungen auf die Existenz von Fixelementen.

c) Die Richtung von Fixgeraden wird durch die Eigenvektoren definiert.

   Überprüfen Sie diese Aussage an einem geeigneten Beispiel.

d) Punkte P auf der Fixgeraden müssen die Fixgeradenbedingung

   $(A - I) * \vec{p} = k * \vec{v}$ erfüllen.

   Erklären Sie zunächst diese Bedingung.

   Zeigen Sie dann an Bsp. 2, welche Punkte P bei bekanntem k die Fixgeradenbedingung erfüllen.

Hausaufgabe 4

1. Untersuchen Sie die Abbildung:

   $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \vec{x}$

   auf Fixelemente.

2. Gegeben ist die Abbildung: $\vec{x}' = 3\vec{x}$.

   Welcher Abbildungstyp wird damit beschrieben und wie zeigt sich das bei den Fixelementen?

Lösungen und Tipps zum Einsatz

Def. 1: Eine Abbildung L: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt linear, wenn für alle u, v $\in \mathbb{R}^2$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $L(u + v) = L(u) + L(v)$

(ii) $L(\lambda v) = \lambda\ L(v)$

Def. 2: Eine Abbildung heißt affin, wenn es ein c $\in \mathbb{R}^2$ und eine lineare Abbildung $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt, sodass gilt: $\alpha(u) = c + L(u), \quad u \in \mathbb{R}^2$.

M 1 Typen linearer Abbildungen und die Verschiebung

Aufgabe 1: Die identische Abbildung

a) Durch additive Verknüpfung der Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ entsteht die zweireihige **Einheitsmatrix** I:

$$I = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A\,.$$

Für die Identität gilt die Gleichung: i: $\vec{x}' = I * \vec{x}$ gilt, mit

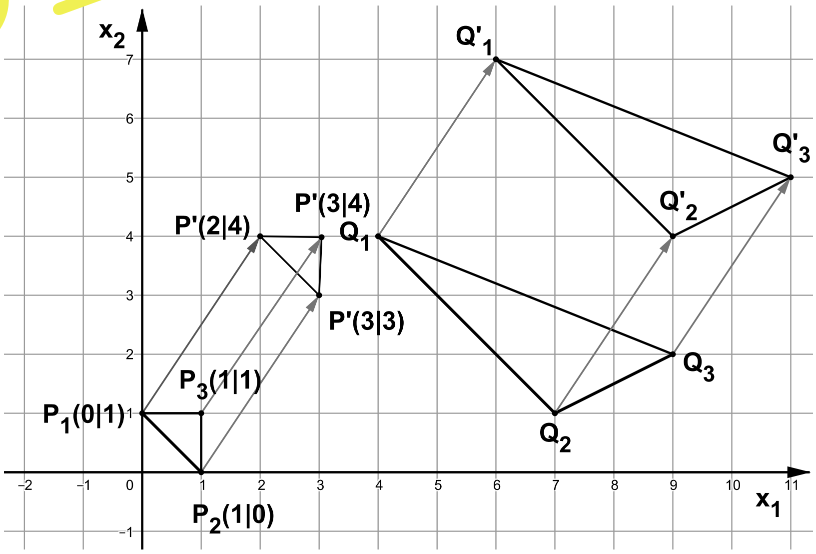
$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 * x_1 + 0 * x_2 \\ 0 * x_1 + 1 * x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

P´= P = (2|1) und Q´= Q = (–2|3).

b) Die Angabe der Bildpunkte zu P und Q ist „trivial" ist, daher gilt:

$P_1(0|1)$, $P_2(1,0)$, $P_3(1|1)$ $\rightarrow$ $P_1´(0|1)$, $P_2´(1|0)$, $P_3´(1|1)$ und

$Q_1(4|4)$, $Q_2(7|1)$, $Q_3(9|2)$ $\rightarrow$ $Q_1´(4|4)$, $Q_2´(7|1)$, $Q_3´(9|2)$.



Darstellung der identischen Abbildung und Darstellung der Verschiebung um $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Man bezeichnet i als die **identische Abbildung**, weil jeder Punkt X bzw. Vektor $\vec{x}$ auf sich selbst abgebildet wird. Die identische Abbildung ist die einfachste lineare Abbildung. Verkürzt stellt man die identische Abbildung in der Form $\vec{x}' = I * \vec{x} = \vec{x}$ dar.

Die identische Abbildung bildet die Bildpunkte auf die Urbildpunkte ab.