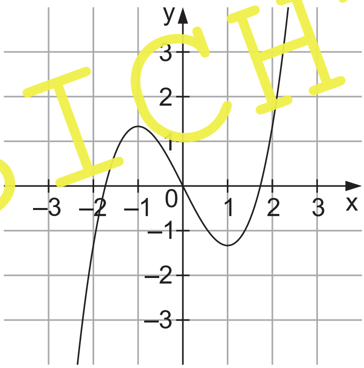
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II



Funktionsgleichungen bestimmen

Gleichungen aufstellen und Graphen skizzieren

RAABE
KLASSE SCHULE

Funktionsgleichungen bestimmen

1. Für eine ganzrationale Funktion f mit möglichst niedrigem Grad gilt:

   (1) $f(0)=f'(0)=f''(0)=0 \wedge f'''(0)\neq 0$

   (2) $f(2)=0 \wedge f'(2)>0$

   (3) $f'(1{,}5)=0 \wedge f''(1{,}5)>0$

   (4) $f(1)=-1 \wedge f''(1)=0 \wedge f'''(1)\neq 0$

   Beschreiben Sie die Bedeutung der einzelnen Eigenschaften für den Graphen G_f der Funktion, bestimmen Sie deren Gleichung und skizzieren Sie den Graphen G_f.

2. Eine Funktion f erfüllt die folgenden Bedingungen:
   $f'(x)=f(x)+3 \wedge f(0)=-1$

   Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung und skizzieren Sie den Graphen.

3. Eine Funktion f erfüllt die folgenden Bedingungen:
   $f'(x)=f(x)-2 \wedge f(0)=0$

   Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung und skizzieren Sie den Graphen.

4. Eine Funktion f erfüllt die folgenden Bedingungen:
   $f''(x)=2\cdot f'(x)$ und der Graph G_f der Funktion schneidet die x-Achse im Ursprung unter einem 45°-Winkel.

   Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung und skizzieren Sie den Graphen.

5. Eine Funktion f erfüllt die folgenden Bedingungen:

   $$f(x)>0 \wedge f'(x)=f(x)\cdot\left(\frac{1}{x+1}-1\right)$$

   Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung und skizzieren Sie den Graphen.

6. Eine Funktion f erfüllt die folgenden Bedingungen:
   $f'(x)=-2\cdot f(x)+2 \wedge f(0)=3$

   Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung und skizzieren Sie den Graphen.

7. Eine Funktion f erfüllt die folgenden Bedingungen:

   $$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = f(x) \quad \wedge \quad f(1) = e$$

   Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung und skizzieren Sie den Graphen.

8. Eine ganzrationale Funktion f möglichst kleinen Grades erfüllt die folgenden Bedingungen:

   (1) $f(-x) = -f(x)$

   (2) $f'(1) = 0$

   (3) $f(1) = -\frac{4}{3}$

   Beschreiben Sie die Bedeutung der einzelnen Aussagen, stellen Sie eine Gleichung von f auf und skizzieren Sie den Graphen.

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend
- Fachlicher Bezug: Analysis
- Kommunikation: argumentieren, begründen
- Problemlösen: Darstellungen verwenden, Lösungsstrategie entwickeln
- Modellierung: –
- Medien: –
- Methode: Einzel- oder Gruppenarbeit
- Inhalt in Stichworten: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktion, Graph, Ableitung, lokales Extremum, Nullstelle

Autor: Alfred Müller

Lösung

1. (1) Im Ursprung liegt ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente, d. h. ein Terrassenpunkt, vor, d. h. die Funktion f hat dort eine dreifache Nullstelle.

   (2) Im Punkt $N(2\,|\,0)$ schneidet der steigende Graph die x-Achse.

   (3) Im Punkt mit $x = 1{,}5$ liegt ein Tiefpunkt vor.

   (4) Im Punkt $W(1\,|\,-1)$ liegt ein Wendepunkt vor.

   Wegen der dreifachen Nullstelle bei $x = 0$ und der einfachen bei $x = 2$ hat die einfachste ganzrationale Funktion das folgende Aussehen:

   $$y = f(x) = a \cdot x^3 \cdot (x-2)$$

   Wegen:

   $$f(1) = -1 \quad \Rightarrow \quad -1 = a \cdot 1 \cdot (-1) = -a \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

   Daraus folgt:

   $$y = f(x) = x^4 - 2x^3$$

   Graph:

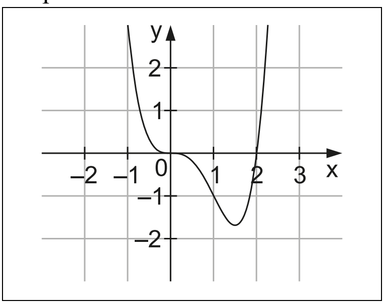


Abb. 1

2. Aus $f'(x) = f(x) + 3$ folgt:

$$\frac{f'(x)}{f(x)+3} = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln|(f(x)+3)| = x + c$$

$$\Rightarrow \quad |(f(x)+3)| = e^{x+c} = e^x \cdot e^c$$

Daraus folgt:

$$f_1(x) = e^{x+c} - 3 \quad \text{oder} \quad f_2(x) = -3 - e^{x+c}$$

Mit $f_1(0) = -1$ gilt:

$$e^c - 3 = -1 \quad \Rightarrow \quad e^c = 2 \quad \Rightarrow \quad y = f_1(x) = 2 \cdot e^x - 3$$

Mit $f_2(0) = -1$ gilt:

$$-e^c - 3 = -1 \quad \Rightarrow \quad e^c = -2 \text{ ist nicht erfüllbar.}$$

Daraus folgt:

$$y = f(x) = f_1(x) = 2 \cdot e^x - 3$$

Graph:

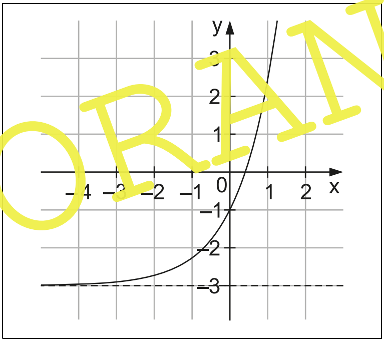


Abb. 2