Wurzelgleichungen – ein Lernzirkel zur Analysis

Dr. Jürgen Leitz, Hamburg
Illustrationen von Dr. Jürgen Leitz

Foto: Viktor Lutsenko/iStock/Getty Images Plus

Das Lösen von Potenzen und Wurzeln und die Äquivalenzumformungen über Gleichungen/Ungleichungen werden wiederholt. Zur Motivation der Anwendung von Wurzelgleichungen dient eine Aufgabe zu Berechnungen am Obelisken von Luxor, der seit 1836 auf dem Place de la Concorde in Paris steht. Anschließend wird der Begriff der Wurzelgleichung einschließlich einer Schrittfolge zum Lösen derselben eingeführt. Übung und Festigung erfolgen durch das Lösen entsprechender Aufgaben in Gruppenarbeit in Form eines Lernzirkels.

RAABE, KLASSE SCHULE

Wurzelgleichungen – ein Lernzirkel zur Analysis

Dr. Jürgen Leitz, Hamburg
Illustrationen von Dr. Jürgen Leitz

Hinweise

Vorbemerkungen

Eine Gleichung, in der die Variable unter einer Wurzel steht, nennt man eine Wurzelgleichung. Deren Lösung folgt in der Regel einem strengen Rezept, das die Schüler lernen und üben können. Elementar sind dabei die Definitionsmenge, das Isolieren der Wurzel, das Potenzieren und schließlich das Durchführen der Kontrolle (Probe), bevor die Lösungsmenge der Gleichung angegeben werden kann.

In der Mathematik, Physik, Technik und bei Bauwerken gibt es zahlreiche Anwendungen, die mithilfe von Wurzelgleichungen gelöst werden können.

Beispiele:

1. Für das Volumen eines Pyramidenstumpfes mit Höhe h, Grundfläche A_G und Deckfläche A_D gilt:

   $$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(A_G + \sqrt{A_G + A_D} + A_D\right).$$

   Wenn A_G oder A_D zu bestimmen sind, muss die Wurzelgleichung gelöst werden.

2. Das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz beim waagerechten Wurf lautet:

   $$v = \sqrt{v_0^{\,2} + g^2 \cdot t^2}.$$

   Dabei bezeichnet v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, g die (Erd-)Beschleunigung und t die Zeit. Ist v_0 oder t gesucht, muss die Wurzelgleichung gelöst werden.

Didaktik und Methodik

Die Unterrichtseinheit ist für etwa sieben Unterrichtsstunden vorgesehen. In der ersten Doppelstunde wiederholen [illegible]enden Kenntnisse über Gleichungen und festigen das Rechnen mit Potenzen und Wurzeln in arbeitsteiliger Gruppenarbeit. Mithilfe zweier Arbeitsblätter in Form eines Lückentextes frischen sie ihr Wissen zu Äquivalenzumformungen für Gleichungen und Ungleichungen auf. Die Lösungen dieser beiden Arbeitsblätter können die Schüler auch als Info-Blätter verwenden. Danach vermitteln Sie den Begriff der Wurzelgleichung und eine Schrittfolge zum Lösen von Wurzelgleichungen.

Zur Motivation der Anwendung von Wurzelgleichungen dient eine Aufgabe zu Berechnungen am Obelisken von Luxor, der seit 1836 auf dem Place de la Concorde in Paris steht. Dass ein Nichtbeachten der Umformungsregeln bei Wurzelgleichungen (z. B. Fallunterscheidungen) zu kuriosen Ergebnissen führen kann, zeigt der Mücke-Elefant-Vergleich (Kuriositäten).
Übung und Festigung erfolgen durch das Lösen entsprechender Aufgaben in Gruppenarbeit in Form eines Lernzirkels, der aus vier Stationen (optional Station 5) besteht und von jeder Lerngruppe zu durchlaufen ist. Die Schüler arbeiten in Kleingruppen von maximal drei bis vier Schülern.

Jede Station besteht aus drei Aufgaben.

Der Lernzirkel sieht vor, dass jede Kleingruppe eine Station pro Unterrichtsstunde durchläuft. Je nach Leistungsstärke der Schüler kann diese Zeit verkürzt werden. Aufgaben, die nicht geschafft werden, sind zu Hause fertigzustellen. Mithilfe von Tippkarten können Sie Hinweise zum Lösen jeder Aufgabe geben, ohne dabei die Lösung selbst vorwegzunehmen. Die Schüler können hier nachlesen, wenn sie nicht wissen, wie sie mit der Lösung einer Aufgabe beginnen sollen. Zu manchen Aufgaben gibt es mehrere Hinweise und Tipps. Lassen Sie die Schüler nach dem Lesen eines Tipps nochmals nachdenken, ob sie nun einen Lösungsweg finden, bevor Sie ihnen den nächsten Tipp zukommen lassen. Ausführliche Lösungen der Aufgaben liegen am Lehrertisch aus, sodass die Schüler ihre Ergebnisse nach Beendigung einer Station überprüfen können.

Lernvoraussetzungen

– Potenz– und Wurzelgesetze
– Rechnen mit Potenzen und Wurzeln
– Begriffe Gleichung/Ungleichung
– Gleichungsarten und äquivalente Umformungsregeln
– Definitionsbereich von Wurzeln
– Lösungsmenge einfacher Wurzelgleichungen

M 1 Infoblatt 1: Rechnen mit Potenzen und Wurzeln

Potenzregeln

$a,b \in \mathbb{R};\ a,b \neq 0$ und $m,n \in \mathbb{Z}$

Formel	Bedeutung
$a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n,\ n \in \mathbb{N}$	Potenz a^n : n Faktoren a
$a^0 = 1$	Potenz mit dem Exponenten 0
$a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$	Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis
$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$	Potenzieren einer Potenz
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponenten
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	Potenz mit negativem Exponenten
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	Division von Potenzen mit gleicher Basis
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a},\ n \neq 0$	Potenzen mit gebrochenem Exponenten sind Wurzeln
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m,\ n \neq 0$	

Wurzelgesetze

$a,b \in \mathbb{R};\ a,b \geq 0$ und $m,n \in \mathbb{N};\ m,n \geq 1$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

M 2 Potenzen und Wurzeln – frischen Sie Ihr Wissen auf!

Aufgabe 1

Vereinfachen Sie die folgenden Terme.

a) $5x^3 - 2x^2 + 3x - 2x^3 + 5x^2 - 6x$

b) $-x^3 - 3 \cdot (x^5 + x^2 + x + 6)$

c) $\frac{3x^{-3}}{6x^{-4}} \cdot \frac{6x^{-3}}{2x^0}$

d) $\frac{5x^0}{2x^{-3}} \cdot \frac{2x^{-2}}{8x^0}$

Aufgabe 2

Berechnen und vergleichen Sie die Werte der beiden Terme.

a) $x = \left(5^2\right)^3$ und $y = -\left(-5^3\right)$

b) $x = \left(2^4 \cdot 4^2\right)^2$ und $y = \left(\left(\sqrt{4}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^4\right)^2$

c) $x = -2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2$ und $y = \left(-2 \cdot \sqrt{3}\right)$

d) $x = \sqrt{2} \cdot \left(3 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2}\right)$ und $y = \frac{3 \cdot \sqrt{3a} + \sqrt{27a}}{\sqrt{3a}}$

M 3 Infoblatt 2: Terme und Gleichungen

Term

Ein Term ist ein **sinnvoller** mathematischer Ausdruck, z. B.: $2y$ oder $3x - 5$;
dagegen ist $4 + (:2/$ **kein** Term.

Gleichung

Eine **Gleichung** enthält mindestens eine Variable (meistens x) und zwei Terme, die durch das Zeichen = verbunden sind.

Beispiel: $7x + 3 = 12$

Gleichungsarten

1. **Lineare Gleichungen**
   Variable nur in einfacher Potenz
   $6x + 3 = 3x - 2$
   auch Lineare Gleichungssysteme (LGS)

2. **Potenzgleichungen**
   a) Quadratische Gleichungen (Variable in zweiter Potenz)
   $7x^2 - 11x + 18 = 0$
   b) Biquadratische Gleichungen (nur die Potenzen x^4, x^2 und x^0)
   $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ $\left(\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - [illegible]x^0 = 0\right)$
   Gleichungen dieser Art lassen sich durch Substitution von $x^2 = y$ auf quadratische Gleichungen zurückführen. Das zuvor genannte Beispiel würde damit lauten:
   $y^2 - 3y - 4 = 0$.
   Nach dem bekannten Lösungsweg für quadratische Gleichungen ließe sich auf diesem Wege y und in weiterer Folge auch x leicht ermitteln.
   c) Kubische Gleichungen (Variable in dritter Potenz)
   $[illegible]x^3 - 6x^2 - 1[illegible]x + 38 = 0$
   d) Exponentialgleichungen (Variable als Exponent)
   $5^{x[illegible]} = 25$

M 4 Gleichungen/Ungleichungen – Lückentext

Lösen von Gleichungen – Äquivalenzumformungen

– Eine Gleichung zu lösen bedeutet, alle Werte für die Variable zu finden, für die die Gleichung eine ________ Aussage ist.

– Für das Lösen von Gleichungen gibt es die sog. Äquivalenz____________.
Bei deren Anwendung bleibt die Lösungsmenge der Gleichung ____________.

Äquivalenzumformungen

– Terme auf den beiden Seiten des Gleichheitszeichens können ____________ werden.

– Termumformungen auf einer Seite oder auf beiden Seiten wie z. B. Auflösen der Klammern, Zusammen____________.

– ________________________ der gleichen Zahl oder desselben Terms auf ________ Seiten

– ____________________________ mit einer von ______ verschiedenen Zahl auf beiden Seiten

– ________________________ mit einer ____________ nur dann, wenn bekannt ist, dass diese Variable nicht den Wert ______ hat.

– ____________________ beider Seiten, wenn die gesuchte Variable im ____________ der Gleichung steht

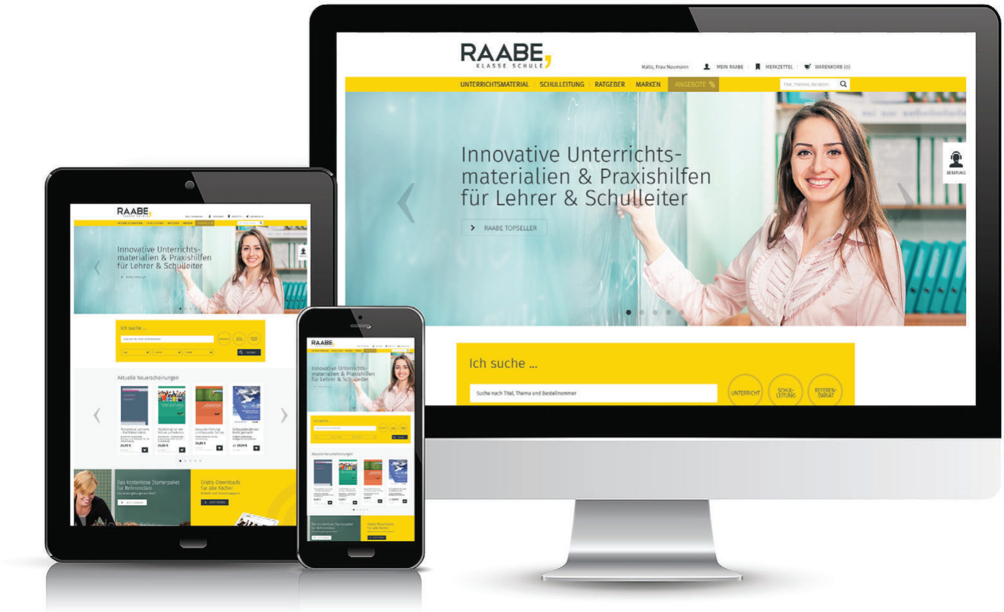
Keine Äquivalenzumformungen

– Potenzieren ____________ auf beiden Seiten einer Gleichung ist keine Äquivalenzumformung – man erhält dabei auch Scheinlösungen

– ________________________ mit einem Term, in dem die ____________ vorkommt, führt ebenfalls zu ________________________.

RAABE, KLASSE SCHULE

Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de