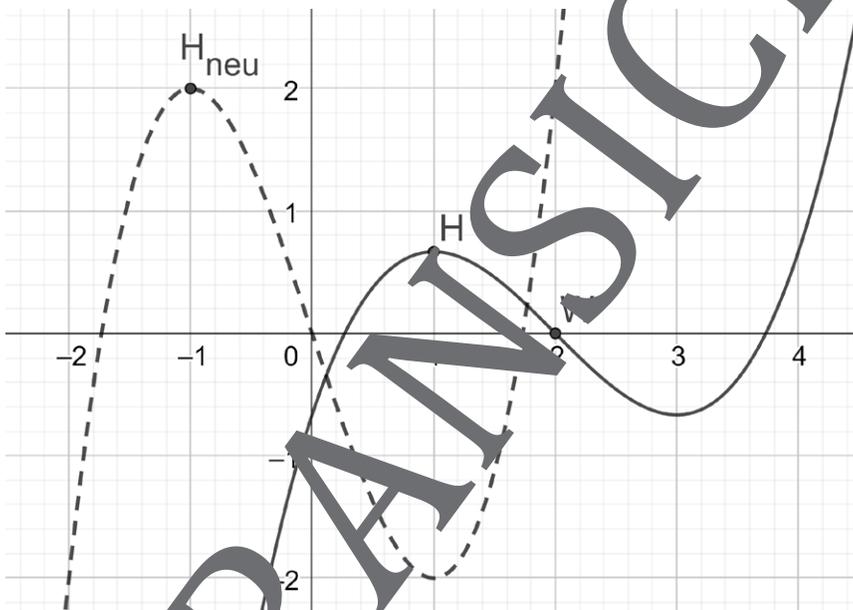


# Parameterbestimmung bei einer ganzrationalen Funktionenschar

Günther Weber



Grafik: Günther Weber

In diesem Material bestimmen die Jugendlichen charakteristische Punkte bzw. Eigenschaften einer Funktionenschar. Abhängig vom Parameter stellen sie die Gleichung der Wendetangente auf und betrachten die Dreiecksfläche, die die Wendetangente mit den Koordinatenachsen einschließt. Bei dem Parameter der Funktionenschar müssen sie hierbei Fallunterscheidungen durchführen bzw. überprüfen, ob der Parameter die gewünschten Bedingungen erfüllt.

Bei einer Funktion der Funktionenschar werden Transformationen durchgeführt und die Lernenden bestimmen den neuen Funktionsterm. Anhand dieser neuen Funktionen lösen die Schülerinnen und Schüler Extremalwertaufgaben.

# Parameterbestimmung bei einer ganzrationalen Funktionenschar

Oberstufe (grundlegend/weiterführend)

Günther Weber

Hinweise	1
Aufgaben	3
Lösungen	5

## Die Schülerinnen und Schüler lernen

Hoch-, Tief- und Wendepunkte bei einer ganzrationalen Funktionenschar kennen und führen abhängig vom Parameter  $k$  eine Fallunterscheidung bezüglich der Hoch- und Tiefpunkte durch und bestimmen Ortslinien von Punkten.

Die Lernenden können die Tangente und die Normale in einem Punkt des Graphen aufstellen und den Parameter  $k$  so wählen, dass das von der Tangente, der Normalen und der  $x$ -Achse eingeschlossene Dreieck bestimmte Eigenschaften aufweist. Die Jugendlichen erlernen, wie man die Zielfunktion von Extremalaufgaben aufstellen und rechnerisch bzw. graphisch lösen. Die Schülerinnen und Schüler entdecken verschiedene Transformationen und stellen den Normalenfunktionsterm einer transformierten Funktion auf.

## Hinweise

### Lernvoraussetzungen:

Ihre Schülerinnen und Schüler kennen notwendige und hinreichende Bedingungen zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten. Sie können abhängig von Parameter die Art des Extremums angeben. Die Lernenden bestimmen sicher die Steigung in einem Punkt eines Graphen. Das Aufstellen der Tangentengleichung bzw. der Gleichung der Normale in einem Punkt des Graphen bereitet ihnen keine Schwierigkeiten. Sie können die Zielfunktion einer Extremalaufgabe aufstellen und diese lösen. Im Allgemeinen sind die Lernenden sicher im Umgang mit ganzrationalen Funktionen (schreiben) und dazu fähig, diese sowohl zu differenzieren als auch zu integrieren. Sie kennen Transformationen und können sie auf den Graphen einer Funktion anwenden. Die Lernenden kennen den Begriff der Ortslinie (das Verfahren zum Aufstellen der Gleichung der Ortslinie muss nicht bekannt sein und kann im Unterricht besprochen werden). Von Vorteil ist es, wenn die Schüler und Schülerinnen Übung im Umgang mit einem GTR/CAS-Rechner sowie mit GeoGebra haben.

### Lehrplanbezug:

Im Kernlernplan

[https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP\\_GoSt\\_Mathematik.pdf](https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GoSt_Mathematik.pdf)

(aufgerufen am 24.03.2023) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler ...

- verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten,
- bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen,
- führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese,
- wenden die Faktor-, Summen- und Potenzregel zum Ableiten von Funktionen an,
- deuten den Inhalt von orientierten Flächen im Kontext,
- bestimmen Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen, mithilfe von bestimmten Integralen.

Zudem nutzen die Lernenden mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge, um Sachverhalte zu veranschaulichen bzw. Ergebnisse zu kontrollieren.

### Methodisch-didaktische Anmerkungen:

Vor der Bearbeitung der Aufgaben weisen Sie als Lehrkraft darauf hin, dass in einigen Aufgabenstellungen der Operator „bestimme rechnerisch“ steht und dass beim Operatorzusatz „rechnerisch“ grundsätzlich ein mathematischer Ansatz und zugehörige Berechnungen darzustellen sind. Neben dem Ansatz sind somit weitere Lösungsschritte zu dokumentieren.

Bei fast allen Aufgaben bietet sich eine Veranschaulichung bzw. Überprüfung der Ergebnisse mit GeoGebra an. Eine Veranschaulichung sollte insbesondere bei schwächeren Lerngruppen bei **Aufgabe 1)** oder bei **Aufgabe 2c)** vor der Bearbeitung stattfinden. So kann bei Aufgabe 1) gezeigt werden, bei welchen Parametern ein Extrempunkt ein Hoch- bzw. Tiefpunkt ist. Bei Aufgabe 2c) kann anhand der Veranschaulichung verdeutlicht werden, bei welcher Eigenschaft genau zwei Nullstellen vorkommen. Bei **Aufgabe 4)** wiederholen Sie das Verfahren zur Bestimmung der Gleichung der Ortslinie bzw. führen das Verfahren ein.

## Aufgaben

M1

Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_k(x) = \frac{4x^3 - 12k \cdot x^2 + 9k^2 \cdot x + 5k^3 - 24k}{12}, k \neq 0$$

1. Bestimmen Sie rechnerisch die Extrem- und Wendepunkte der Funktionenschar. Geben Sie die Art der Extrempunkte in Abhängigkeit von  $k$  an.

$$\left[ \text{Zwischenergebnisse: } E_1 \left( \frac{k}{2} \mid \frac{7k^3 - 24k}{12} \right) \text{ und } E_2 \left( \frac{3k}{2} \mid \frac{5k^3 - 24k}{12} \right), W_k \left( k \mid \frac{k^3 - 2k}{2} \right) \right]$$

2. Bestimmen Sie  $k$  so, dass
- der Graph der Funktion durch den Ursprung verläuft,
  - der Wendepunkt auf der  $x$ -Achse liegt,
  - die Funktion  $f_k$  genau zwei Nullstellen besitzt.
3. Zeigen Sie, dass für beliebiges  $k$  der Wendepunkt die Strecke zwischen den Extrempunkten halbiert.
4. Bestimmen Sie die Ortslinie der Hochpunkte.
5. Bestimmen Sie rechnerisch ein positives  $k$  so, dass die  $y$ -Koordinate des Tiefpunktes minimal wird.
6. Im Schnittpunkt des Graphen der Funktion  $f_k$  mit der  $y$ -Achse werden die Tangente und die Normale gezeichnet. Die Tangente, die Normale und die  $x$ -Achse begrenzen ein Dreieck. Bestimmen Sie ein positives  $k$  so, dass dieses Dreieck einen Flächeninhalt von 1 FE hat.
7. Die Wendetangente schneidet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Bestimmen Sie  $k$  so, dass die Wendetangente den positiven Teil der  $y$ -Achse schneidet und das Dreieck gleichschenkelig wird.

# Sie wollen mehr für Ihr Fach? Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download im RAABE Webshop.



**Über 5.000 Unterrichtseinheiten**  
sofort zum Download verfügbar



**Webinare und Videos**  
für Ihre fachliche und  
persönliche Weiterbildung



**Attraktive Vergünstigungen**  
für Referendar:innen mit  
bis zu 15% Rabatt



**Käuferschutz**  
mit Trusted Shops



Jetzt entdecken:  
**www.raabe.de**