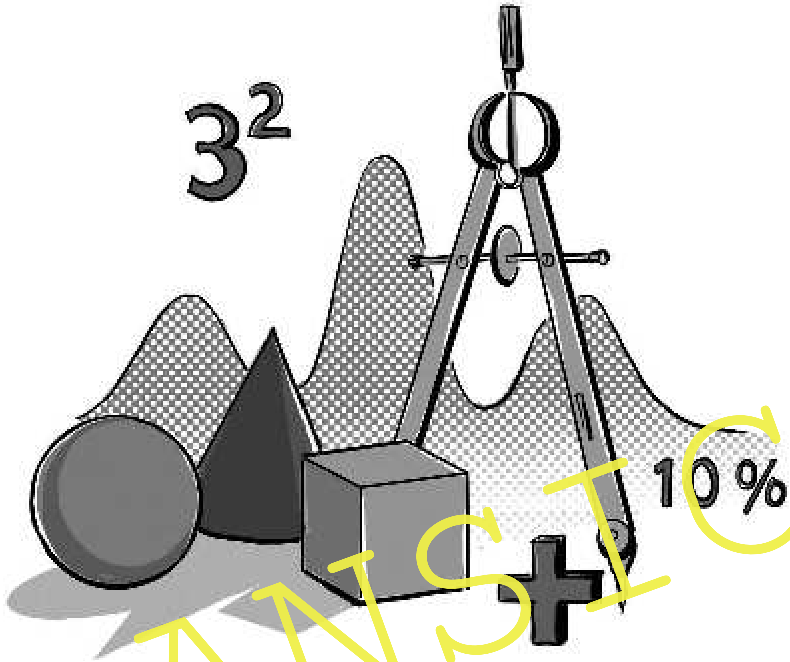
Trigonometrie – differenzierte Übungen in Sachzusammenhängen

Stefanie Ginaidi, Frankfurt



Klasse: 9/10

Dauer: 5 Stunden

Inhalt: Trigonometrische Grundbeziehungen, Anwendungsaufgaben

Ihr Plus:

✓ Differenziertes Material, das Sie individuell einsetzen können

✓ Wiederholungsfolie und Lernerfolgskontrolle

Trigonometrische Zusammenhänge wurden bereits in der Antike entdeckt. Umso verblüffender ist es, dass sich diese Beziehungen bis heute in vielerlei Anwendungsbereichen finden lassen. Ihre Schüler erhalten in diesem Beitrag einen Einblick in die Möglichkeiten, welche die Funktionen Sinus, Kosinus und Tangens bieten.

Didaktisch-methodische Hinweise

Trigonometrische Beziehungen werden in vielen verschiedenen Bereichen angewendet – in der **Geodäsie**, der **Astronomie**, der **Navigation von Schiffen oder Flugzeugen** und auch bei **akustischen, mechanischen oder elektromagnetischen Wellen**. Deshalb ist es wichtig, dieses Thema in der Schule zu unterrichten und unter verschiedenen Aspekten zu üben.

Das vorliegende Material können Sie als **Stationenarbeit** oder auch als **Lerntheke** verwenden, um die Grundlagen der Trigonometrie in verschiedenartigen, anwendungsbezogenen Aufgaben zu üben. Es bietet sich zur Wiederauffrischung der bereits erworbenen Kenntnisse an, z. B. wenn das Thema nach den Ferien wiederholt oder zur Vorbereitung auf eine **Prüfung** wieder aufgearbeitet werden soll.

Binnendifferenzierung

Die Materialien umfassen Aufgaben verschiedener Schwierigkeitsgrade zu unterschiedlichen Sachsituationen, die sich mithilfe der trigonometrischen Grundfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens lösen lassen.

Die Aufgaben sind mit einem, zwei oder drei Sternen versehen, die Aufgaben mit einem Stern sind eher einfach und ohne komplexen Zusammenhang aufgebaut, die Aufgaben mit zwei Sternen haben einen mittleren Schwierigkeitsgrad, und die Aufgaben mit drei Sternen sind schwer zu lösen und komplex.

Ziele

Ihre Schüler

- ... wiederholen die Definitionen von Sinus, Kosinus und Tangens an einem rechtwinkligen Dreieck und fixieren sie schriftlich,
- ... lösen Aufgaben zu Sinus, Kosinus und Tangens in Sachsituationen,
- ... schätzen sich selbst ein, welchen Schwierigkeitsgrad der Aufgaben sie auswählen möchten,
- ... arbeiten selbstständig und mit eigenem zeitlichen Rhythmus,
- ... entscheiden, ob sie zu einer Aufgabe einen Tipp brauchen.

Zur Lerntheke/Stationenarbeit

Vor Beginn der Bearbeitung der Aufgaben erfolgt über den OHP (Folie „Frische dein Wissen zur Trigonometrie auf!“) eine Auffrischung und Festigung der Definitionen von Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck. Die Schüler zeichnen ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck und schreiben die Definitionen ab, die Sie gemeinsam mit Ihrer Klasse sammeln. Die Folie können Sie auch kopieren und als Arbeitsblatt austeilen.

Nach der Wiederholungsphase bearbeiten Ihre Schüler die Aufgaben. Wenn Sie Wert darauf legen, mit wenigen Kopien auszukommen, können Sie die Materialien an verschiedenen Stationen jeweils viermal auslegen. Es empfiehlt sich dann, die Arbeitsblätter durch Klarsichtfolien zu schützen. Bei dieser Arbeitsform können sich die Lernenden gegenseitig helfen, falls das Sozialgefüge der Klasse dies zulässt. Wenn in Form einer Lerntheke gearbeitet werden soll, kopieren Sie die Materialien in der benötigten Anzahl und legen sie in Schubladen oder auf dem Fensterbrett bereit. Die Jugendlichen holen sie sich von dort an ihren Platz.

Auf einen Blick

Einstieg: Die Grundlagen wiederholen

Material	Thema	Stunde
M 1 (SW-Fo)	**Frische dein Wissen zur Trigonometrie auf!** Im Klassengespräch, unterstützt durch eine Folie auf dem OHP, werden die Begriffe von Sinus, Kosinus und Tangens wiederholt.	1.

Lerntheke

Ihre Klasse arbeitet selbstständig mit den Materialien der Lerntheke.

Material	Thema	Stunde
M 2	**Der Neigungswinkel**	2.–4.
M 3	**Solaranlagen – eine Dachneigung berechnen** Höhen- und Winkelbestimmung am Dreieck; Interpretation der Ergebnisse anhand eines realen Problems wie dem Aufbau einer Solaranlage auf einem Dach	
M 4	**Sonne, Mond, Erde – der Umfang eines Himmelskörpers** Berechnungen des Durchmessers und Umfangs am Kreis; Umgang mit Winkelminuten; Nachempfinden eines antiken Verfahrens zur Berechnung des Erdumfangs	
M 5	**Welche Höhe? – Die Höhe eines Objekts berechnen** Berechnungen an und argumentieren mit gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecken; praktische Anwendung eines Verfahrens zu Bestimmung der Höhe eines Objekts	
M 6	**Berechnungen an Vielecken** Seitenlängen- und Flächeninhaltsbestimmung am regelmäßigen Sechseck; Bestimmung der Oberfläche und des Volumens eines Prismas	

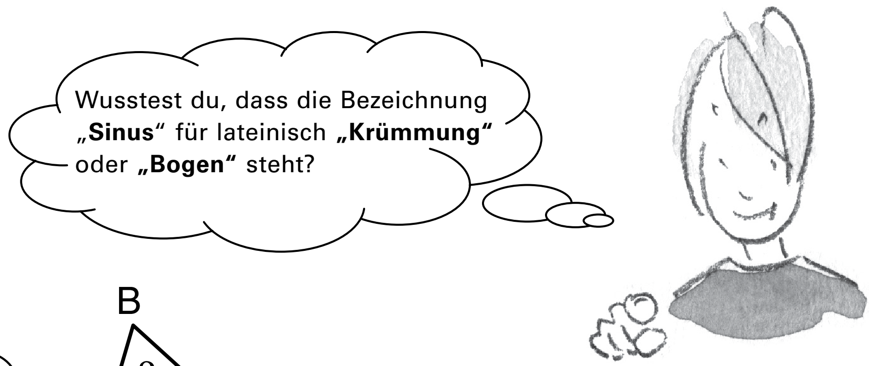
Falls keine Selbstkontrolle erfolgt ist, besprechen Sie am Ende die Aufgaben gemeinsam mit Ihren Schülern.

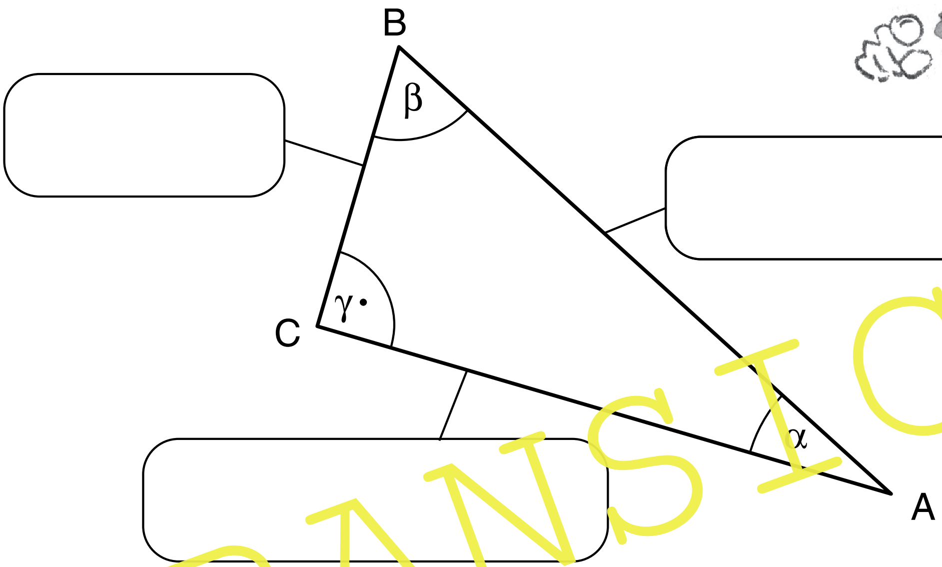
Lernerfolgskontrolle

Material	Thema	Stunde
M 7	**Bist du fit? – Lernerfolgskontrolle** Wiederholung der Begriffe Sinus, Kosinus und Tangens; Berechnungen am regelmäßigen Sechseck und Dreieck durch trigonometrische Funktionen	5.

SW-Fo = Schwarz-Weiß-Folienvorlage

M 1 Frische dein Wissen zur Trigonometrie auf!





Aufgabe

- Schreibe zweimal das Wort „Kathete“ und einmal „Hypotenuse“ an der richtigen Stelle in die Kästchen. Ergänze die Bezeichnung der Seite (a, b oder c).
- Ergänze die Sätze:

– Von Sinus, Kosinus und Tangens spricht man nur in ____________________ Dreiecken.

– Die Hypotenuse liegt ____.

– Als Kathete bezeichnet man ____.

- Ergänze jeweils die Begriffe Gegenkathete, Ankathete und Hypotenuse, sodass sich korrekte Definitionen ergeben:

o sin α = __________________________ cos α = __________________________

o tan α = __________________________

- Gib für den Winkel α jeweils den Sinus, den Kosinus und den Tangens mit den Seitenbezeichnungen a, b, und c an.

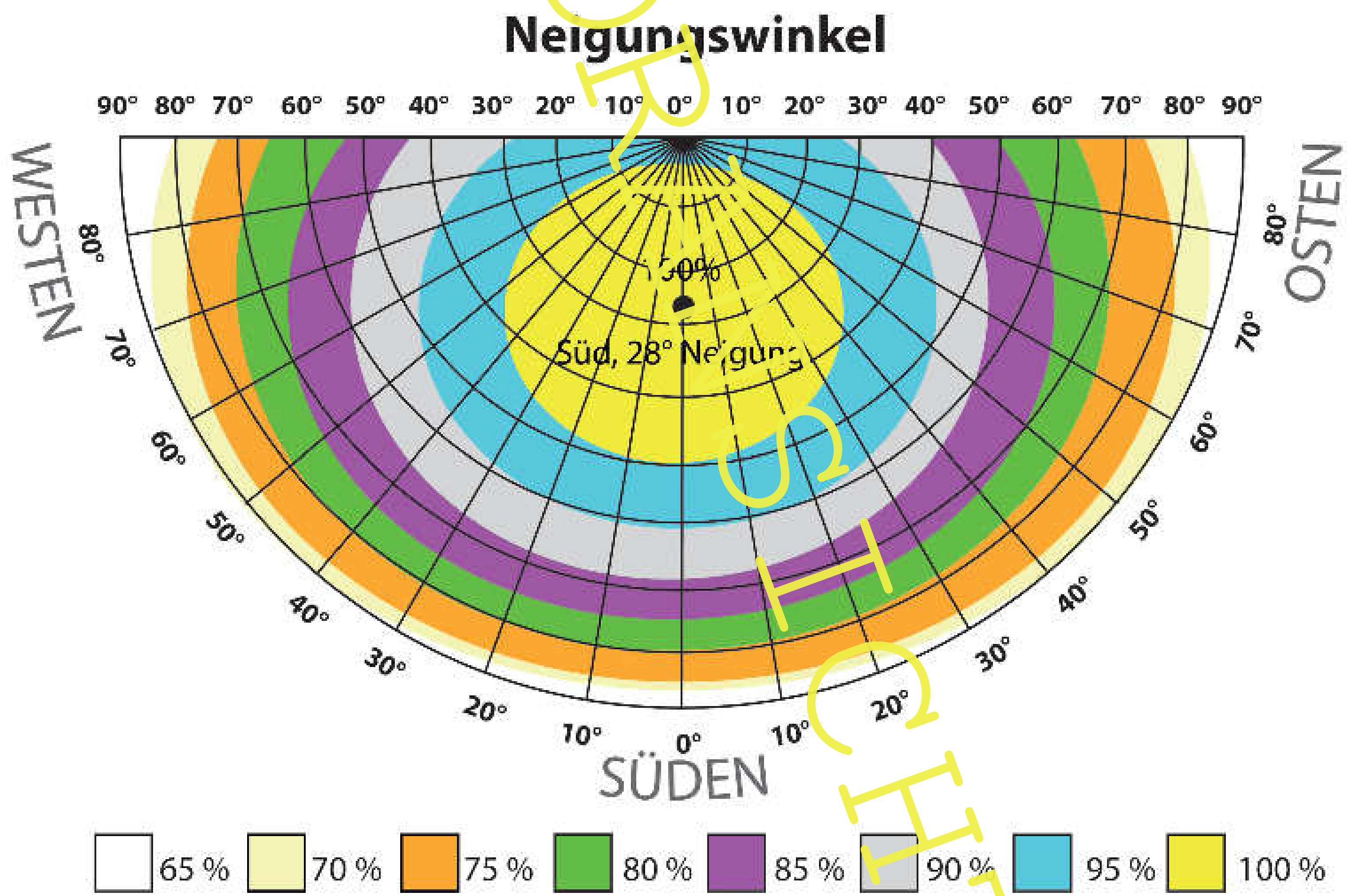
o sin α = __________________________

o cos α = __________________________

o tan α = __________________________

M 2

Der Neigungswinkel



http://www.rechnerphotovoltaik.de/images/voraussetzungen/dachausrichtung_ertrag_sonnenstand.gif

I/C

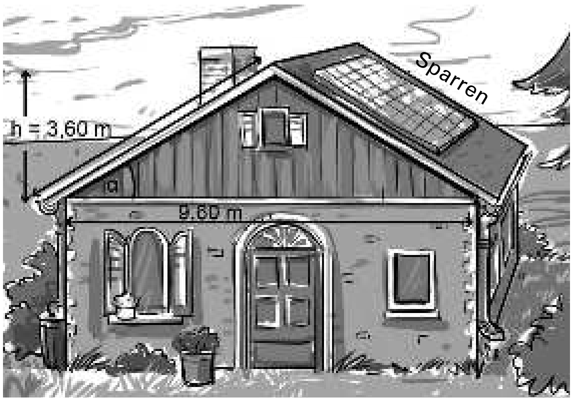
M 3 Solaranlagen – eine Dachneigung berechnen ★☆☆

Die Breite eines Hauses beträgt von der äußeren Kante bis zur Mitte 4,80 m. Die Giebelhöhe h ist 3,60 m.

a) Bestimme den Winkel α.

b) Bestimme die Länge l der Sparren.

c) Bestimme die Größe des Giebelwinkels.



d) Auf dem Dach soll eine Solaranlage angebracht werden. Diese funktionieren optimal bei einem Neigungswinkel von 30°–35°[1]. Funktioniert das? Welche Möglichkeiten gäbe es, eine Anlage unter optimalem Winkel zu installieren?

e) Das Haus hat einen Standort von 75° Ost. Bei wie viel Prozent liegt die Ausnutzung der Solarzellen?

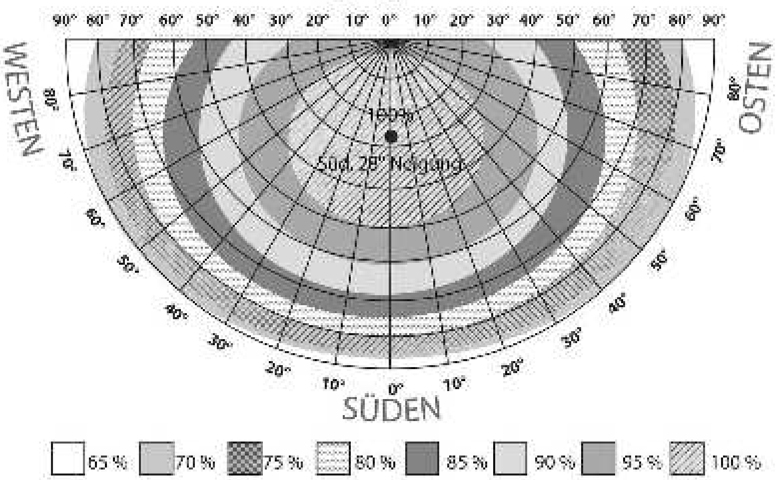
f) Welcher Neigungswinkel wäre an diesem Standort ideal? Es gibt mehrere Antworten.

g) Warum wurde das Dach des Hauses nicht mit diesem Winkel gebaut? Welche Gründe sprechen für diese Dachneigung, welche dagegen? Begründe deine Vermutungen.

h) Heutzutage werden immer mehr Häuser so gebaut, dass man eine Solaranlage problemlos installieren könnte. Welche Gründe vermutest du für diesen Trend?

i) Kennst du Häuser, auf denen Solaranlagen stehen?n?

Neigungswinkel



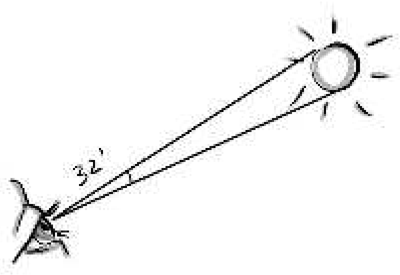
****

a) Das Dach ist mit einem gleichschenkligen Dreieck vergleichbar. Nutze den Tangens.

b) Nutze den Sinus oder den Kosinus.

[1] http://www.photovoltaik-web.de/dacheignung/dachneigung.html

M 4 Sonne, Mond, Erde – der Umfang eines Himmelskörpers ★★★



Die Sonne kann man von der Erde aus unter einem Winkel von 32' (Minuten) sehen.

Tipp Eine Minute ist ein Sechzigstel von einem Winkelgrad.

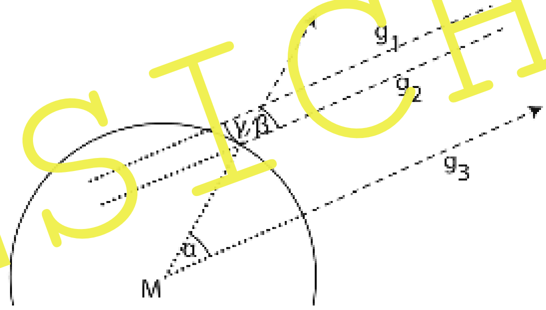
a) Die Sonne ist etwa $1{,}5 \cdot 10^8$ km von der Erde entfernt. Bestimme den Äquatordurchmesser d der Sonne. Welche Modellannahme liegt deiner Berechnung zugrunde?

b) Der Mond ist von der Erde im Durchschnitt etwa 380 000 km entfernt. Berechne auch den Durchmesser des Mondes unter der Annahme, er ließe sich unter demselben Winkel von der Erde aus sehen.

c) Berechne aus dem Durchmesser jeweils den Umfang von Mond und Sonne.

I/C

Der Umfang der Erde wurde in der Antike schon sehr genau von **Eratosthenes von Kyrene** (276–194 v. Chr.) bestimmt. Er ging dabei folgendermaßen vor:



Eratosthenes maß die Winkel der Schatten, die ein Obelisk in Alexandria warf. Über einem Brunnen in Syene stand die Sonne im Zenit.

a) Schlage nach, was „im Zenit stehen" bedeutet.

b) Wenn man von parallelen Lichtstrahlen ausgeht, sind γ und α Wechselwinkel, also gleich groß.

β und α sind ebenfalls gleich groß. Warum? Begründe.

c) Aus Eratosthenes Aufzeichnungen geht nicht hervor, ob er γ oder α gemessen hat.

Die Messung ergab 7° 12', also $\frac{1}{50}$ eines Vollkreises.

Tipp Es gilt: 1 Grad = 60 Minuten.

Um den Umfang zu berechnen, braucht man die Strecke der beiden Orte, nach damaligen Maß 5 000 Stadien;

1 ägyptisches Stadion ≙ 157,5 m

Berechne, welches Maß sich damit für den Erdumfang ergab.

d) Schlage den genauen Wert nach und gib die prozentuale Abweichung an.

e) Vielleicht hat Eratosthenes auch mit griechischen (1gr. Stadion ≙ 185,14 m) statt ägyptischen Maßen gerechnet. Wie groß ist dann die prozentuale Abweichung?

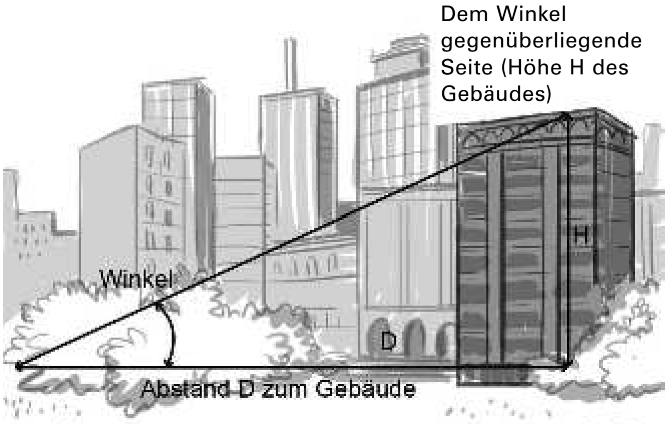
****

Tipp: Man nähert die Sonne als Kugel an und die Erde als punktförmig im Vergleich zur Sonne. Der Abstand von der Erde (=Schenkel des Sehwinkels) ist die Höhe des eingezeichneten, gleichschenkligen Dreiecks.

I/C

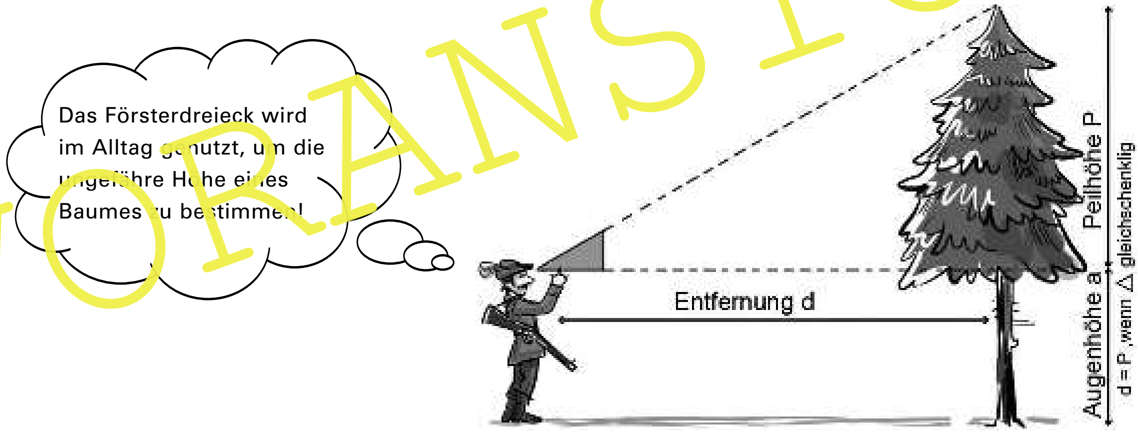
M 5 Welche Höhe? – Die Höhe eines Objekts berechnen ★☆☆

Aufgabe 1



Menschen sehen im Abstand von 100 m ein Gebäude im Winkel von 25°.

Wie hoch ist das Gebäude?



Die Skizze zeigt, wie man mit einem Geodreieck (Försterdreieck) die Höhe eines Baumes oder eines Gebäudes bestimmen kann, indem man die Spitze des Baumes oder den höchsten Punkt eines Gebäudes mit dem Geodreieck anpeilt. Die Peilhöhe entspricht der Höhe des angepeilten Objekts abzüglich der Augenhöhe des Betrachters.

Aufgabe 2

a) Begründe die Formel: **Objekthöhe = Augenhöhe + Peilhöhe**

b) Die Aussage **Objekthöhe = Augenhöhe + Entfernung** impliziert, dass die Entfernung zum Objekt gleich der Peilhöhe ist.

Warum ist dies so? Begründe auf zwei Arten:

1. über die Eigenschaften gleichschenkliger Dreiecke
2. über die Aussage tan 45° = 1.

****

Tipp: Nutze den Tangens.

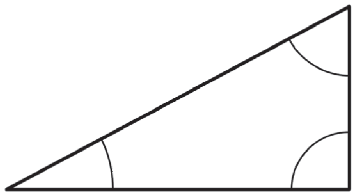
I/C

M 7 Bist du fit? – Lernerfolgskontrolle

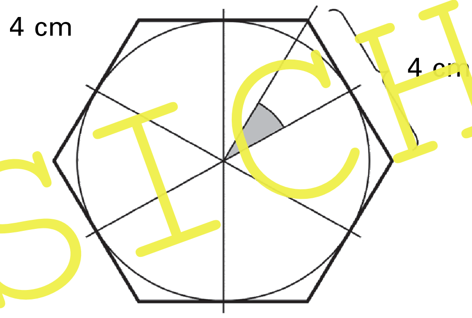
Aufgaben

1. Gib den Sinus, Kosinus und Tangens des Winkels α als Verhältnis der Seiten a, b und c an.

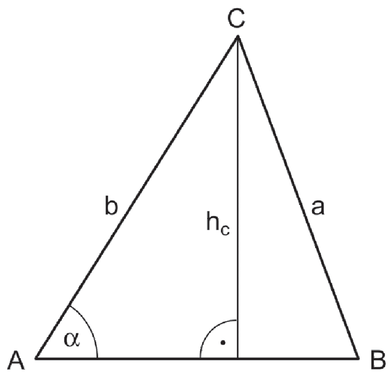
Tipp Beschrifte zuerst die Seiten mit den korrekten Bezeichnungen.



2. Ein regelmäßiges Sechseck hat die Kantenlänge 4 cm. Berechne den Inkreisradius des Sechsecks.



3. a) Berechne im gegebenen Dreieck mit α = 40°, γ = 60° und b = 6 cm die Höhe h_c.



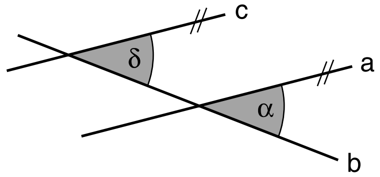
b) Berechne im Dreieck aus a) die Kantenlängen a.

M 8 Tippkarten

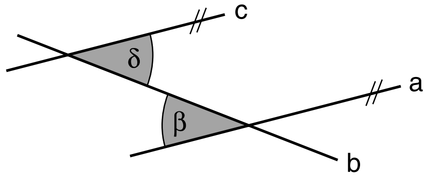
Wiederholung Stufenwinkel und Wechselwinkel

Es gilt: Wenn die Geraden a und c parallel sind, so sind die Winkel α und δ bzw. δ und β gleich groß.

Stufenwinkel



Wechselwinkel



Tipp M 3 **Solaranlagen – eine Dachneigung berechnen**

Bedenke, dass gleichschenklige Dreiecke symmetrisch sind. Berücksichtige beim Ablesen aus der Grafik den Standort und den Neigungswinkel des Daches.

Tipp M 4 **Sonne, Mond, Erde – der Umfang eines Himmelskörpers**

Der Äquator der Sonne ist wie bei der Erde auch die Stelle mit <u>maximalem</u> Umfang. Stelle dir im gegebenen Dreieck die Höhe vor oder zeichne sie als Hilfslinie ein.

Suche ein rechtwinkliges Dreieck.

Tipp M 5 **Welche Höhe? – Die Höhe eines Objekts berechnen**

Das kleine Messdreieck, das in der Hand gehalten wird, und das große Dreieck sind zueinander ähnlich.

Überlege, was dies für die Winkel bedeutet.

Tipp M 6 **Berechnungen an Vielecken**

Welche Eigenschaften hat die in c) gesuchte Dreiecksart?

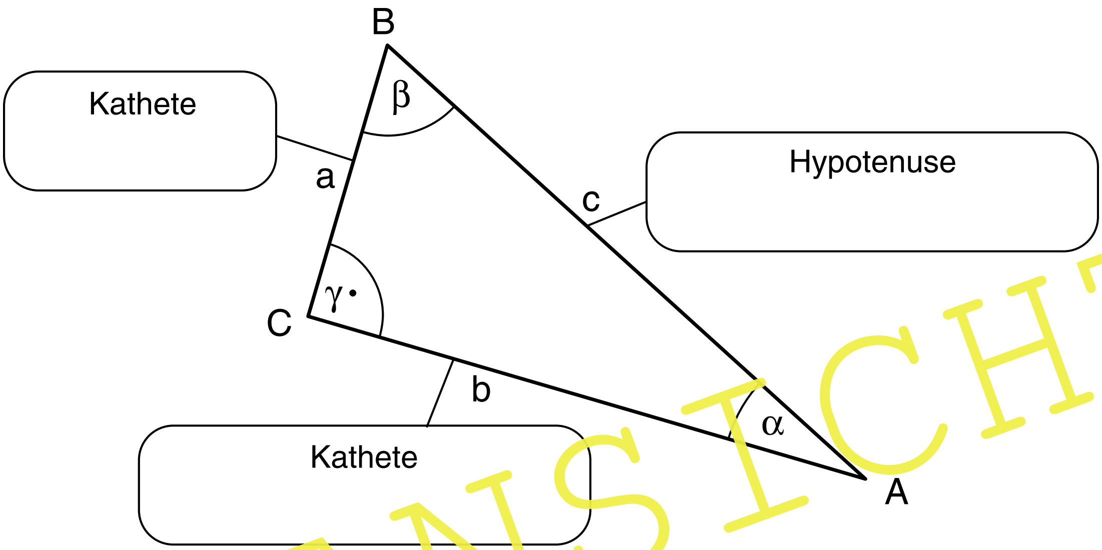
Überlege oder schlage in der Formelsammlung nach.

Lösungen und Tipps zum Einsatz

M 1 Frische dein Wissen zur Trigonometrie auf!

Aufgabe

- Schreibe zweimal das Wort „Kathete“ und einmal „Hypotenuse“ an der richtigen Stelle in die Kästchen. Ergänze die Bezeichnung der Seite (a, b oder c).



- Ergänze die Sätze:
- Von Sinus, Kosinus und Tangens spricht man nur in rechtwinkligen Dreiecken.
- Die Hypotenuse liegt dem rechten Winkel gegenüber.
- Als Kathete bezeichnet man die dem rechten Winkel anliegenden Seiten.
- Ergänze jeweils die Begriffe Gegenkathete, Ankathete und Hypotenuse, sodass sich korrekte Definitionen ergeben:

o $\cos\alpha = \dfrac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}}$

o $\sin\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}}$

o $\tan\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$

- Gib für den Winkel α jeweils den Sinus, den Kosinus und den Tangens mit den Seitenbezeichnungen a, b, und c an.

$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$ $\qquad \cos\alpha = \dfrac{b}{c}$ $\qquad \tan\alpha = \dfrac{a}{b}$